Tópico 1 - Introdução a Álgebra de Imagens

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Imagens

Vamos denotar por A^B o conjunto de todas as funções $f : B \to A$

Definição Formal de Imagem

Seja $\mathbb{F}$ um conjunto de valores e $\mathbf{X}$ um conjunto de pontos. Uma *imagem $\mathbb{F}$-valorada em* $\mathbf{X}$ é qualquer elemento de $\mathbb{F}^{\mathbf{X}}$. $\mathbb{F}$ é o chamado conjunto de possíveis intervalos de valores e $\mathbf{X}$ é o domínio espacial da imagem.

Imagens

Tanto no contexto cotidiano quanto computacional (processamento de imagens, computação gráfica) é comum que a imagem seja representada por seu gráfico (ou *estrutura de dados*). Tal estrutura é dada por um conjunto de pares

$$\mathbf{a} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbf{X}\},$$

em que cada elemento $(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x}))$ é chamado de *pixel* (*picture element*), a primeira coordenada $\mathbf{x}$ dá a localização do *pixel* ou *ponto na imagem* e a segunda $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é o valor do *pixel*.

Imagens

A definição dada é bastante flexível, exigindo apenas que **X** seja um espaço topológico (com noção de proximidade) e que a imagem esteja em uma estrutura algébrica.

Por exemplo, **X** pode ser subconjunto de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{Z}^3$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ pode ter a forma (x, y, t) em que (x, y) é espacial e t temporal.

O conjunto de valores $\mathbb{F}$ também poderia ser $\mathbb{Z}_{2^k}$ ou $(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}_{2^m}, \mathbb{Z}_{2^n})$ correspondendo respectivamente a uma imagem digital ou digital vetorial.

Em geral, qualquer *imagem física* contínua ou discreta pode ser representada neste contexto.

Outline

Operações sobre Imagens

Vejamos as operações sobre ou entre imagens $\mathbb{F}$-valoradas. Se γ é uma operação binária em $\mathbb{F}$, ela também será uma operação binária em $\mathbb{F}^X$, a qual partindo de $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}$ será dada por

$$\mathbf{a}\gamma\mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})\gamma\mathbf{b}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$$

Seja por exemplo a estrutura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \vee, \wedge)$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$. Então teremos:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

Operações sobre Imagens

Similarmente, temos as operações escalares γ. Se $k \in \mathbb{F}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$:

$$k\gamma\mathbf{a} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = k\gamma\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$$

$$\mathbf{a}\gamma k = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})\gamma k, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$$

Operações sobre Imagens

```
img1 = imread('cameraman.png');img1 = double(img1);img1 = img1/255;
img2 = imread('goldhill.png');img2 = double(img2);img2 = img2/255;
img3 = imread('cat.png');img3 = double(img3);img3 = img3/255;
img4 = imread('rabbit.png');img4 = double(img4);img4 = img4/255;
[nl,nc] = size(img1); % presume-se que todas as imagens tenham o mesm
img_soma = zeros(nl,nc);img_max = zeros(nl,nc);
for i=1:nl
    for j=1:nc
        img_soma(i,j) = img1(i,j)+img2(i,j);
        img_max(i,j) = max(img3(i,j),img4(i,j));
    end
end
figure; imshow(img_soma); title('Soma de imagens');
figure; imshow(img_max); title('Maximo de imagens');
```

Operações sobre Imagens

a

b

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$

a

b

$\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$

Operações sobre Imagens

No caso das imagens reais, para $k \in \mathbb{R}$:

$$k \cdot \mathbf{a} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$$

$$k + \mathbf{a} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = k + \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$$

Operações sobre Imagens - Exemplo

Seja a imagem $\mathbf{a} \in (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)^{\mathbb{R}}$ com valores dados pela matriz A_{ij} abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Para $k = 4$ teríamos a matriz para $k \cdot \mathbf{a}$:

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 44 & -4 \\ 12 & 28 & 8 \\ 4 & -16 & 36 \end{bmatrix}$$

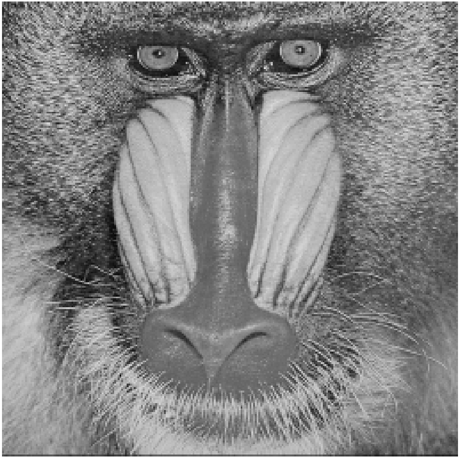
e para $k + \mathbf{a}$:

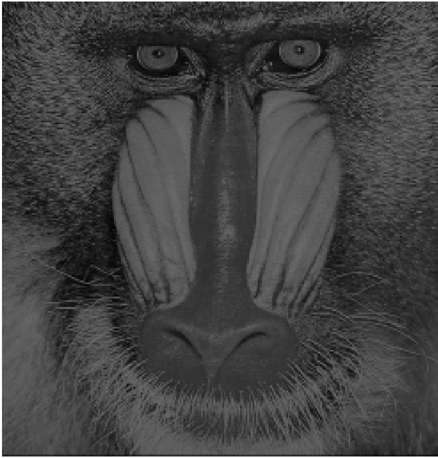
$$C = \begin{bmatrix} 8 & 15 & 3 \\ 7 & 11 & 6 \\ 5 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Operações sobre Imagens

```
img1 = imread('baboon.png');img1 = double(img1);img1 = img1/255;
[nl,nc] = size(img1);
img_mult = 0.5*img1;
imshow(img_mult);
```

Operações sobre Imagens





Operações sobre Imagens

Sobretudo em aplicações de alto nível em visão computacional, podemos nos deparar com imagens vetoriais ou com um conjunto de valores associado a cada *pixel*.

Uma imagem conjunto-valorada tem a forma $\mathbf{a} : \mathbf{X} \to 2^{\mathbb{F}}$ e a estrutura algébrica é $(2^{\mathbb{F}}, \cup, \cap, \tilde{})$, em que $\tilde{}$ denota o complemento de conjunto. Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (2^{\mathbb{F}})^{\mathbf{X}}$:

$$\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

$$\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{F} \setminus \mathbf{a}(\mathbf{x})\}$$

Operações sobre Imagens

Assim como o complemento, existem outras operações unárias importantes, uma destas é a *redução global*.

Se γ é uma operação binária associativa e comutativa em $\mathbb{F}$ e $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é finito, então a *reduçao global induzida por* γ será $\Gamma : \mathbb{F}^{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{F}$ e definida por

$$\Gamma \mathbf{a} = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \Gamma_{k=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_1) \gamma \mathbf{a}(\mathbf{x}_2) \gamma \ldots \gamma \mathbf{a}(\mathbf{x}_n).$$

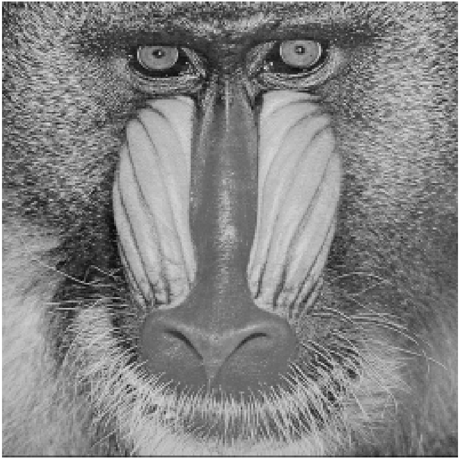
Por exemplo, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $\gamma = +$, então $\Gamma = \sum$ e

$$\sum \mathbf{a} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{a}(\mathbf{x}_2) + \cdots + \mathbf{a}(\mathbf{x}_n).$$

Operações sobre Imagens

```
img1 = imread('baboon.png'); % le imagem e passa a matriz para a v
img1 = double(img1); % para que calculos com numeros reais possam
img1 = img1/255; % imagem normalizada entre 0 e 1
[nl,nc] = size(img1); % dimensoes da imagem
S1 = 0; % S1 armazena a soma global da 1a imagem
for i=1:nl
    for j=1:nc
        S1 = S1+img1(i,j);
    end
end
%==========================================================================
img2 = imread('cameraman.png'); % le imagem 2
img2 = double(img2);
img2 = img2/255;
[nl,nc] = size(img2);
S2 = 0; % S2 armazena a soma global da imagem 2
for i=1:nl
    for j=1:nc
        S2 = S2+img2(i,j);
    end
end
```

Operações sobre Imagens



$\mathbf{\Sigma a} = 3.3\mathrm{e} + 04$ (+ escuro)

$\mathbf{\Sigma a} = 9.1e + 04$ (+ claro)

Outline

Composição Funcional

Uma operação unária $\mathbb{F}^{\mathbf{X}} \to \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$ pode ser induzida por uma composição com a função $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$:

$$f(\mathbf{a}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

Por exemplo, a função $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induz a operação unária $\sin : \mathbb{R}^{\mathbf{X}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$:

$$\sin(\mathbf{a}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sin(\mathbf{a}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

Outro exemplo é a função característica:

$$\chi_{\geq k}(r) = \begin{cases} 1 \text{ se } r \geq k \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Assim uma imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$ pode ser binarizada por $\chi_{\geq k}(\mathbf{a})$, que atribuirá 1 à posição $\mathbf{x}$ se $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \geq k$ e 0 caso contrário.

Composição Funcional

```
img1 = imread('barbara.png');
img1 = double(img1);
img1 = img1/255*2*pi; % imagem normalizada entre 0 e 2pi
[nl,nc] = size(img1);
img2 = zeros(nl,nc);
for i=1:nl
    for j=1:nc
        img2(i,j) = sin(img1(i,j));
    end
end
imshow(img2);
```

Composição Funcional

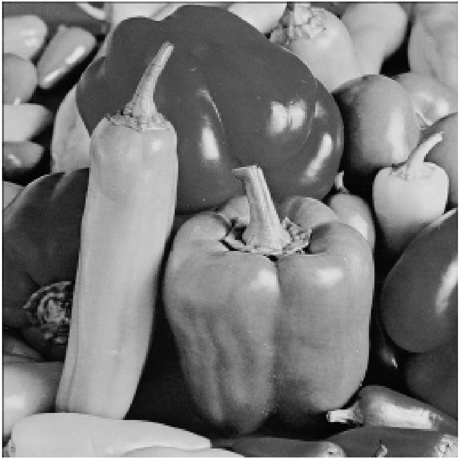
Original

Seno

Composição Funcional

```
img1 = imread('peppers.png');
img1 = double(img1);
img1 = img1/255;
[nl,nc] = size(img1);
img2 = img1>=0.5;
imshow(img2);
```

Composição Funcional



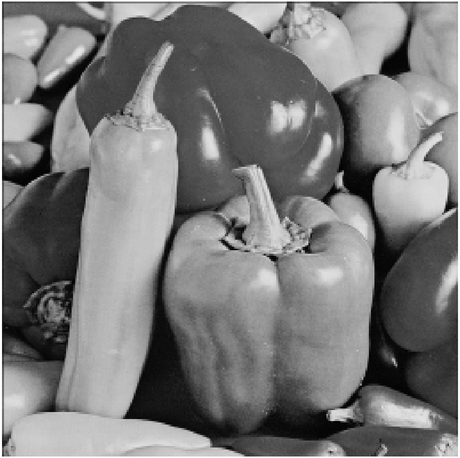
Original

$\chi_{\geq 0.5}(\mathbf{a})$

Composição Funcional

```
img1 = imread('peppers.png');
img1 = double(img1);
img1 = img1/255;
[nl,nc] = size(img1);
img2 = img1.*(img1>=0.3&img1<=0.7);
imshow(img2);
```

Composição Funcional



Original

$\mathbf{a} \cdot \chi_{[0.3,0.7]}(\mathbf{a})$

Composição Funcional

Uma variante desta função é

$$\chi_{[j,k]}(r) = \begin{cases} 1 \text{ se } j \leq r \leq k \\ 0 \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

a qual permite a limiarização (*thresholding*) de uma imagem $\mathbf{a}$, definida na linguagem da álgebra de imagens como

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot \chi_{[j,k]}(\mathbf{a}),$$

equivalente a

$$\mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x})) : \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ se } j \leq \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq k, \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0, \text{ caso contrário}\}$$

Composição Funcional

A função também pode agir entre domínios espaciais distintos. Se $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$, a imagem induzida $\mathbf{a} \circ f \in \mathbb{F}^{\mathbf{Y}}$ será dada por

$$\mathbf{a} \circ f = \{(\mathbf{y}, f(\mathbf{y})) : \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

Exemplo é a transformação de deslocamento de uma imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$, sendo $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^2$. Se $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$, temos o deslocamento de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{y}$ dado por

$$\mathbf{a} + \mathbf{y} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{b}(\mathbf{z})) : \mathbf{b}(\mathbf{z}) = \mathbf{a}(\mathbf{z} - \mathbf{y}), \mathbf{z} \in \mathbf{X} + \mathbf{y}\}$$

Composição Funcional

Outra transformação espacial unária que pode mudar domínio é a transposta. Dada a imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n}$, sua transposta é dada por

$$\mathbf{a}' \equiv \mathbf{a} \circ f$$

em que

$$f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

satisfazendo

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Outline

Operações Binárias Induzidas por Operações Unárias

As mesmas funções que induzem operações unárias podem também induzir as binárias.

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definida por $f(r) = r^k$, sendo k um real não-negativo. Esta função induz a operação unária

$$\mathbf{a} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x})) : \mathbf{b}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}(\mathbf{x})]^k, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

Operações Binárias Induzidas por Operações Unárias

Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^{\mathbf{X}}$, esta pode então ser estendida para a seguinte operação binária:

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})^{\mathbf{b}(\mathbf{x})}\}$$

Definimos logaritmo similarmente:

$$\log_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \log_{\mathbf{b}(\mathbf{x})} \mathbf{a}(\mathbf{x})\}$$

Operações Binárias Induzidas por Operações Unárias

Por fim, como tais operações podem levar a valores indeterminados como divisões por zero, a álgebra de imagens permite a definição de uma pseudo-inversa:

$$\mathbf{a}^{-1} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x})) : \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{a}(\mathbf{x})} \text{ se } \mathbf{a}(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ do contrário, } \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0\}$$

Operações Binárias Induzidas por Operações Unárias - Exemplos

Considere as imagens **a** e **b** representadas pelas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz correspondente a $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ é

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Já a matriz correspondente a $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{\mathbf{b}}$ é

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 8 \\ 1 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Binárias Induzidas por Operações Unárias

```
clear;
img = imread('barbara.png');img = double(img);img =
    img/255;
[nl,nc] = size(img);
for i = 1:nl
    for j = 1:nc
        if img(i,j)~=0
            img2(i,j) = 1/img(i,j);
        else
            img2(i,j) = 0;
        end
    end
end
img2 = img2/max(img2(:));
imshow(img2);
```

Operações Binárias Induzidas por Operações Unárias

a

$\mathbf{a}^{-1}$

Outline

Especificação Funcional de Operações em Imagens

Conceitos classicamente associados a funções podem ser definidos também para operações em imagens baseadas em funções.

Por exemplo, a *restrição* de $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$ ao subconjunto $\mathbf{Z} \in \mathbf{X}$ é definida por

$$\mathbf{a}|_{\mathbf{Z}} \equiv \mathbf{a} \cap (\mathbf{Z} \times \mathbb{F}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbf{Z}\}.$$

Especificação Funcional de Operações em Imagens

Temos também a restrição em relação ao contradomínio. Se $S \subset \mathbb{F}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$, então a *restrição* de $\mathbf{a}$ a S é denotada

$$\mathbf{a}||_S \equiv \mathbf{a} \cap (\mathbf{X} \times S) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x})) : \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in S\}.$$

A restrição em contradomínio pode ser muito útil.

Por exemplo, a limiarização que vimos de uma imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$ por um limiar k pode ser redefinida como $\mathbf{a}||_{\geq k} \equiv \mathbf{a}||_{[k,\infty)}$, correspondendo à imagem restrita aos pontos de $\mathbf{X}$ em que $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \geq k$.

Especificação Funcional de Operações em Imagens

```
clear;
img = imread('cameraman.png');img = double(img);img
   = img/255;
[nl,nc] = size(img);
for i = 1:nl
    for j = 1:nc
        if (i-nl/2)^2+(j-nc/2)^2 <= 2500
            img2(i,j) = img(i,j);
        else
            img2(i,j) = 0;
        end
    end
end
for i = 1:nl
    for j = 1:nc
        if isprime(round(img(i,j)*255))
            img3(i,j) = img(i,j);
        else
            img3(i,j) = 0;
        end
    end
end

figure; imshow(img2); title('Restricao de dominio');
figure; imshow(img3); title('Restricao de
   contradominio');
```

Especificação Funcional de Operações em Imagens

$\mathbf{a}$

$\mathbf{a}|_{\text{circulo de raio 50}}$

$\mathbf{a}||_{\text{primo}}$

Especificação Funcional de Operações em Imagens

O conjunto S também pode ser uma imagem: $S \in (2^{\mathbb{F}})^{\mathbf{X}}$, e neste caso

$$\mathbf{a}||_S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x})) : \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in S(\mathbf{x})\}.$$

Por exemplo, se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$:

$$\mathbf{a}||_{\leq \mathbf{b}} \equiv \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x})) : \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}(\mathbf{x})\}.$$

Combinando a restrição em domínio com a de contradomínio temos a definição geral. Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{X}$, $S \subset \mathbb{F}$, então a *restrição de* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{Z}$ *e* S é dada por

$$\mathbf{a}||_{\mathbf{Z},S} = \mathbf{a} \cap (\mathbf{Z}, S) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbf{Z} \text{ e } \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in S\}.$$

Especificação Funcional de Operações em Imagens

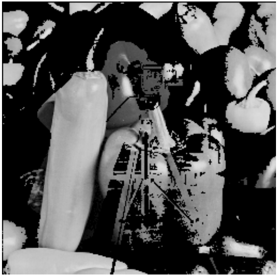
```
clear;
img1 = imread('cameraman.png');img1 = double(img1);
    img1 = img1/255;
img2 = imread('peppers.png');img2 = double(img2);
    img2 = img2/255;
[nl,nc] = size(img1);
for i = 1:nl
    for j = 1:nc
        if img1(i,j) <= img2(i,j)
            img3(i,j) = img2(i,j);
        else
            img3(i,j) = 0;
        end
    end
end

figure; imshow(img3); title('Restricao em relacao a
    outra imagem');
```

Especificação Funcional de Operações em Imagens

$\mathbf{a}$

$\mathbf{b}$



$\mathbf{b}||_{\geq \mathbf{a}}$

Especificação Funcional de Operações em Imagens

Outro conceito importante é o de *extensão* de $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^{\mathbf{Y}}$, em que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são subconjuntos do mesmo espaço topológico:

$$\mathbf{a}|^{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ se } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}) \text{ se } \mathbf{x} \in \mathbf{Y} \setminus \mathbf{X}. \end{cases}$$

Outro conceito elementar é o de contradomínio, que aqui expressaremos pela função

$$range : \mathbb{F}^{\mathbf{X}} \to 2^{\mathbb{F}},$$

definida por

$$range(\mathbf{a}) = \{r \in \mathbb{F} : r = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

Igualmente temos também a função de domínio

$$domain : \mathbb{F}^{\mathbf{X}}|_{(2^{\mathbf{X}} \times 2^{\mathbb{F}})} \to 2^{\mathbf{X}},$$

em que usamos a seguinte notação

$$\mathbb{F}^{\mathbf{X}}|_{(2^{\mathbf{X}} \times 2^{\mathbb{F}})} = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} = \mathbf{a}_{(\mathbf{Z},S)}, \mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}, \mathbf{Z} \in 2^{\mathbf{X}}, S \in 2^{\mathbb{F}}\}$$

Especificação Funcional de Operações em Imagens

O domínio é então definido por

$$domain(\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{a}|_{(\mathbf{Z},S)}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) = r \text{ para algum } r \in \mathbb{F}\}.$$

Por exemplo,

$$domain(\mathbf{a}|_{>k})$$

é o conjunto de pontos $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ para os quais $\mathbf{a}(\mathbf{x}) > k$.

Especificação Funcional de Operações em Imagens

Outro conceito relacionado é o de *concatenação de imagens*. A *concatenação em linha* de $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n}$ é denotada $(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ e dada na nossa linguagem por

$$(\mathbf{a}|\mathbf{b}) \equiv \mathbf{a}|^{\mathbf{b}+(0,k)},$$

de modo que o resultado $(\mathbf{a}|\mathbf{b}) \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{n+k}}$.

A concatenação de um grupo de mais de duas imagens se define recursivamente:

$$(\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|\ldots|\mathbf{a_l}) = ((\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|\ldots|\mathbf{a_{l-1}})|\mathbf{a_l}),$$

Especificação Funcional de Operações em Imagens

enquanto que a *concatenação em coluna* se faz usando a transposta:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ - \\ \mathbf{a_2} \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{a_l} \end{pmatrix} = (\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|\ldots|\mathbf{a_l})^T.$$

Outline

Operações em Imagens Multi-valoradas

Embora nas definições que vimos até agora $\mathbb{F}$ possa ser multi-valorado, alguns casos merecem atenção especial.

Um caso particular são as imagens vetoriais. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}^n$, então a imagem $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbf{X}}$ é um vetor da forma $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a_1}(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a_n}(\mathbf{x}))$ em que cada $\mathbf{a_i}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbf{X}}$, as operações já conhecidas são generalizadas. Por exemplo:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a_1} + \mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{a_n} + \mathbf{b_n})$$

ou ainda se $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{r} + \mathbf{a} = (r_1 + \mathbf{a_1}, \ldots, r_n + \mathbf{a_n}).$$

Operações em Imagens Multi-valoradas

Outra generalização é substituir a operação binária γ por uma sequência de operações $\gamma_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de modo que

$$\mathbf{a}\gamma\mathbf{b} \equiv (\mathbf{a}\gamma_1\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}\gamma_n\mathbf{b}).$$

Por exemplo, se γ_1 e γ_2 são duas operações binárias $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$(x_1, x_2)\gamma_1(y_1, y_2) = x_1y_1 - x_2y_2 \qquad (x_1, x_2)\gamma_2(y_1, y_2) = x_1y_2 + x_2y_1$$

Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbf{X}}$ são imagens complexo-valoradas, o produto ponto-a-ponto $\mathbf{c} = \mathbf{a}\gamma\mathbf{b}$ é dado por

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1(\mathbf{x})\mathbf{b}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{a}_2(\mathbf{x})\mathbf{b}_2(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1(\mathbf{x})\mathbf{b}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{x})\mathbf{b}_1(\mathbf{x}))$$

Operações em Imagens Multi-valoradas

Outras duas operações importantes são o máximo e mínimo na j-ésima coordenada ("vencedor leva tudo"). Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbf{X}}$, o *máximo na j-ésima coordenada* é dado por

$$\mathbf{a} \vee |_j \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ se } \mathbf{a}_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{b}_j(\mathbf{x}),\ \text{caso contrário, } \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})\}$$

e o *mínimo* por

$$\mathbf{a} \wedge |_j \mathbf{b} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ se } \mathbf{a}_j(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}_j(\mathbf{x}),\ \text{caso contrário, } \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})\}.$$

Operações em Imagens Multi-valoradas

Operações unárias também podem ser induzidas com funções como antes. Seja f uma função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv (f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Esta função pode gerar então uma operação unária sobre a imagem $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbf{X}}$:

$$f(\mathbf{a}) \equiv f \circ \mathbf{a} = (f(\mathbf{a}_1), \ldots, f(\mathbf{a}_n)).$$

Como exemplo, a função $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gera

$$\sin(\mathbf{a}) = (\sin(\mathbf{a}_1), \ldots, \sin(\mathbf{a}_n))$$

Operações em Imagens Multi-valoradas

Podemos também definir uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que age diferentemente em cada componente:

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})),$$

a qual gera a operação

$$f(\mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_m(\mathbf{a})) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x})) : \mathbf{b}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{a}(\mathbf{x})), \ldots, f_m(\mathbf{a}(\mathbf{x})))\}.$$

Operações em Imagens Multi-valoradas

Vamos exemplificar com duas funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$f_1(x, y) = \sin(x) + \cosh(y)$ e $f_2(x, y) = \cos(x) + \sinh(y)$.

A função $f : (\mathbb{R}^2)^{\mathbf{X}} \to (\mathbb{R}^2)^{\mathbf{X}}$ aplicada sobre a imagem **a** resulta em

$$f(\mathbf{a}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x})) : \mathbf{b}(\mathbf{x}) = (\sin(\mathbf{a}_1(\mathbf{x}))+\cosh(\mathbf{a}_2(\mathbf{x})), \cos(\mathbf{a}_1(\mathbf{x}))+\sinh(\mathbf{a}_2(\mathbf{x}))), \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$$

A função f acima representa a aplicação da função seno complexo sobre uma imagem com componentes complexos.

Operações em Imagens Multi-valoradas

Por fim, temos também as operações de redução global. Por exemplo:

$$\sum \mathbf{a} = \left(\sum \mathbf{a}_1, \ldots, \sum \mathbf{a}_n\right) = \left(\sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_j), \ldots, \sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_n(\mathbf{x}_j)\right) \in \mathbb{R}^n.$$