Tópico 1 - Introdução a Álgebra de Imagens

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Introdução

- Teoria matemática que formaliza o processamento e análise de imagens
- Visa ser compreensível e unificadora
- Tentativas de criar uma teoria unificadora em processamento de imagens e sinais remontam à década de 70, inspirada nos computadores celulares de Von Neumann
- Paralelismo baseado na descrição de uma operação complexa em imagens por um conjunto de operações elementares

Introdução

- Necessidade da força aérea americana: algoritmos independentes de linguagem
- Aritmética de vizinhança + Morfologia matemática
- Elementos básicos: imagens + *templates* + vizinhanças.

Introdução

LEMBRE-SE: Uma álgebra é uma coleção de conjuntos não vazios mais um número finito de operações que combinam elementos formando novos.

- Álgebra de imagens é heterogênea (sentido de Birkhoff) pois contém elementos de tipos diferentes.
- Dois elementos básicos: conjuntos de pontos (*pixels* e sua relação espacial) e conjuntos de valores (intensidade, cor, etc. dos *pixels*)
- Possivelmente mais de um valor por ponto.

Outline

Conjuntos de Pontos

Conjuntos de pontos são espaços topológicos:

$$\text{conjunto de pontos} \begin{cases} \text{conjuntos de objetos: } \textit{pontos} \\ + \\ \text{topologia: } \textit{conectividade} \end{cases}$$

Conectividade define proximidade, vizinhança, curva, etc.

Conjuntos de Pontos

Conjuntos de pontos denotados pelas últimas letras maiúsculas do alfabeto em negrito: $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$.

Pontos (elementos) denotados com as últimas letras minúsculas: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}$.

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, representa-se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em que x_i é um número real chamado *i-ésima coordenada de* $\mathbf{x}$

Conjuntos de Pontos

Conjuntos de pontos mais usuais em álgebra de imagens são subconjuntos discretos do espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$ com $n = 1, 2, 3$.

Podem estar organizados em qualquer arranjo espacial, embora formas retangulares, circulares ou *snake* sejam mais comuns.

Dois dos conjuntos que mais veremos são os retangulares:

$$\mathbf{X} = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq m - 1, 0 \leq x_2 \leq n - 1\}$$

$$\mathbf{X} = \mathbb{Z}_m^+ \times \mathbb{Z}_n^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x_1 \leq m, 1 \leq x_2 \leq n\}$$

Conjuntos de Pontos

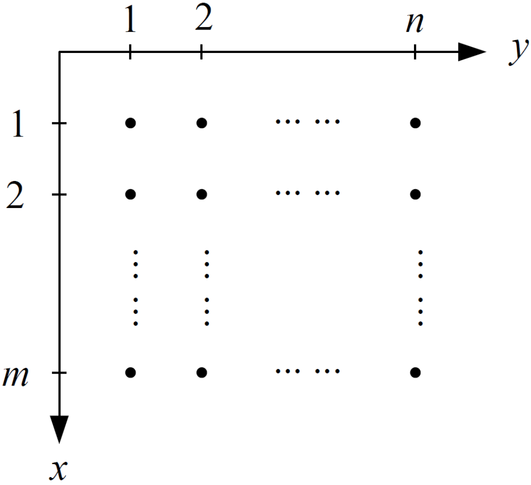

Figura: $\mathbb{Z}_m^+ \times \mathbb{Z}_n^+$ (Ritter & Wilson)

Outline

Operações Pontuais - Unárias

Como conjuntos de pontos são subconjuntos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$, eles herdam operações destes espaços.

Operações unárias importantes como máximos/ mínimos, normas e outros.

Para $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \vee b = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{se } a < b \end{cases} \qquad a \wedge b = \begin{cases} b & \text{se } a \geq b \\ a & \text{se } a < b \end{cases}$$

Assim, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$:

$$\bigvee_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| \vee |x_2| \vee \cdots \vee |x_n| = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| \wedge |x_2| \wedge \cdots \wedge |x_n| = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Operações Pontuais - Unárias

Tratando o ponto como vetor, definimos a norma *Euclideana* L^2, L^p e L^∞:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \bigvee_{i=1}^{n} |x_i|,$$

em que $\bigvee_{i=1}^{n} |x_i| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Outra operação unária ($\mathbf{X} \to \mathbb{R}$) importante é a i-ésima projeção de $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$:

$$p_i(\mathbf{x}) = x_i$$

Operações Pontuais - Unárias

Os próximos conceitos exigem a definição de *conjunto potência* (ou *conjunto de partes*) de um conjunto de pontos $\mathbf{Z}$:

$$2^{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \subset \mathbf{Z}\}$$

Função característica sobre $\mathbf{X} \in 2^{\mathbf{Z}}$:

$$\chi_{\mathbf{X}} : \mathbf{Z} \rightarrow \{0, 1\} \text{ tal que } \chi_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathbf{z} \in \mathbf{X} \\ 0 \text{ se } \mathbf{z} \notin \mathbf{X} \end{cases}$$

Operações Pontuais - Unárias

Dados dois conjuntos de pontos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ definimos a função de vizinhança de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Z}$ por $N(\mathbf{x}) : \mathbf{X} \to 2^{\mathbf{Z}}$.

$N(\mathbf{x})$ é a vizinhança de $\mathbf{x}$ e em $\mathbb{Z}^2$ pode ser definida de duas formas: von Neumann ($N(\mathbf{x})$) e Moore ($M(\mathbf{x})$):

$$N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = (x_1 \pm j, x_2) \text{ ou } \mathbf{y} : \mathbf{y} = (x_1, x_2 \pm k), j, k \in \{0, 1\}\}$$

$$M(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = (x_1 \pm j, x_2 \pm k), j, k \in \{0, 1\}\}$$

Operações Pontuais - Unárias

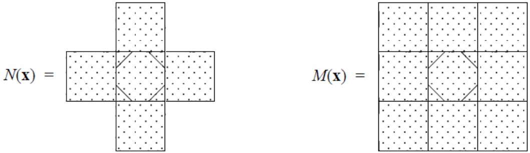

Figura: (Ritter & Wilson)

Operações Pontuais - Unárias

RESUMO:

Negação	$-\mathbf{x} = (-x_1, \ldots, -x_n)$
Teto (menor inteiro $\geq x$)	$\lceil \mathbf{x} \rceil = (\lceil x_1 \rceil, \ldots, \lceil x_n \rceil)$
Piso (maior inteiro $\leq x$)	$\lfloor \mathbf{x} \rfloor = (\lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor)$
Arredondamento	$[\mathbf{x}] = ([x_1], \ldots, [x_n])$
Projeção	$p_i(\mathbf{x}) = x_i$
Soma	$\sum \mathbf{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
Produto	$\Pi \mathbf{x} = x_1 x_2 \ldots x_n$
Máximo	$\bigvee \mathbf{x} = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$
Mínimo	$\bigwedge \mathbf{x} = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$
Norma Euclideana	$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
Norma L^1	$\|\mathbf{x}\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$
Norma L^∞	$\|\mathbf{x}\|_\infty = \|x_1\| \vee \|x_2\| \vee \cdots \vee \|x_n\|$
Dimensão	$dim(\mathbf{x}) = n$
Vizinhança	$\mathbf{N}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$
Função característica	$\chi_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) = 1$ se $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ e 0 caso contrário

Operações Pontuais - Unárias

EXEMPLOS:

Dado $\mathbf{x} = (2, 1, 3)$

$-\mathbf{x} = (-2, -1, -3)$

$p_1(\mathbf{x}) = 2 \ p_2(\mathbf{x}) = 1 \ p_3(\mathbf{x}) = 3$

$\sum \mathbf{x} = 2 + 1 + 3 = 6$

$\Pi \mathbf{x} = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

$\bigvee \mathbf{x} = 2 \vee 1 \vee 3 = 3$

$\bigwedge \mathbf{x} = 2 \wedge 1 \wedge 3 = 1$

$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$\|\mathbf{x}\|_1 = |2| + |1| + |3| = 6$

$\|\mathbf{x}\|_\infty = |2| \vee |1| \vee |3| = 3$

$dim(\mathbf{x}) = 3$

Outline

Operações Pontuais - Binárias

Também herdadas de espaços métricos clássicos.

Sejam os elementos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ e um escalar $k \in \mathbb{R}$ (ou $k \in \mathbb{Z}$).

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$k \cdot \mathbf{x} = (k \cdot x_1, \ldots, k \cdot x_n)$$

$$k + \mathbf{x} = (k + x_1, \ldots, k + x_n)$$

Subtrações são definidas similarmente.

Operações Pontuais - Binárias

Três tipos de multiplicação: *produto de Hadamard*, *produto vetorial* e *produto escalar*. Em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{Z}^3$, respectivamente:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n)$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2, x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n.$$

Operações Pontuais - Binárias

Temos também as distâncias. *Euclideana*, *Manhattan (city block)* e *tabuleiro de xadrez (Chebyshev)*, respectivamente:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right]$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{|x_k - y_k| : 1 \leq k \leq n\}$$

Operações Pontuais - Binárias

A relação entre normas e distâncias é bem conhecida:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$$

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Operações Pontuais - Binárias

RESUMO:

Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$:

Adição	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
Subtração	$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$
Produto de Hadamard	$\mathbf{xy} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$
Divisão	$\mathbf{x}/\mathbf{y} = (x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n)$
Supremo	$\sup(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n)$
Ínfimo	$\sup(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \wedge y_1, \ldots, x_n \wedge y_n)$
Produto pontual	$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$
Produto cruzado	$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$
Concatenação	$\mathbf{x}\hat{\mathbf{z}} = (x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$
Operações escalares	$k\gamma\mathbf{x} = (k\gamma x_1, \ldots, k\gamma x_n)$ em que $\gamma = \{+, -, \cdot, \vee, \wedge\}$

Operações Pontuais - Binárias

EXEMPLOS:

Dado $\mathbf{x} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{y} = (4, 2, 5)$:

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (2 + 4, 1 + 2, 3 + 5) = (6, 3, 8)$

$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (2 - 4, 1 - 2, 3 - 5) = (-2, -1, -2)$

$\mathbf{xy} = (2 \cdot 4, 1 \cdot 2, 3 \cdot 5) = (8, 2, 15)$

$\mathbf{x}/\mathbf{y} = (2/4, 1/2, 3/5)$

$\sup(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (4, 2, 5)$

$\inf(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2, 1, 3)$

Outline

Operações Unárias entre Conjuntos de Pontos

Operações entre conjuntos em geral podem ser aplicadas a conjuntos de pontos.

Exemplo é a complementação de $\mathbf{X} \in 2^{\mathbf{Z}}$:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{Z} \text{ e } \mathbf{z} \notin \mathbf{X}\}$$

Esta é uma operação unária que pode ser vista como binária se considerarmos que $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} \backslash \mathbf{X}$.

Outras operações importantes são a cardinalidade de $\mathbf{X}$:

$$card : 2^{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbb{N}$$

que atribui o número de elementos de $\mathbf{X}$ e a Função Escolha:

$$choice : 2^{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$$

que retorna um elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ aleatoriamente.

Operações Unárias entre Conjuntos de Pontos

Outra operação de interesse é a de supremo de um conjunto $\mathbf{X}$ contendo os pontos $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$:

$$sup(\mathbf{X}) = \sup(\ldots \sup(sup(sup(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}), \mathbf{x_3}), \mathbf{x_4}) \ldots \mathbf{x_k})$$

Se cada ponto é representado por duas coordenadas, i.e, $\mathbf{x_i} = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, k$, então

$$\sup(\mathbf{X}) = (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k, y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_k).$$

O ínfimo se define simetricamente.

Operações Unárias entre Conjuntos de Pontos

Resumo:

Negação	$-\mathbf{X} = \{-\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$
Complementação	$\tilde{\mathbf{X}} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{Z} \text{ e } \mathbf{z} \notin \mathbf{X}\}$
Supremo	$\sup(\mathbf{X})$
Ínfimo	$\inf(\mathbf{X})$
Função Escolha	$choice(\mathbf{X})$ (elemento aleatório)
Cardinalidade	$card(\mathbf{X})$

Operações Binárias entre Conjuntos de Pontos

Operações aritméticas:

Adição	$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$
Subtração	$\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$
Adição de ponto	$\mathbf{X} + \mathbf{p} = \{\mathbf{x} + \mathbf{p} : \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$
Subtração de ponto	$\mathbf{X} - \mathbf{p} = \{\mathbf{x} - \mathbf{p} : \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$

Operações de conjuntos:

União	$\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{X} \text{ ou } \mathbf{z} \in \mathbf{Y}\}$
Interseção	$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{z} \in \mathbf{Y}\}$
Diferença entre conjuntos	$\mathbf{X} \backslash \mathbf{Y} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{z} \notin \mathbf{Y}\}$
Diferença Simétrica	$\mathbf{X} \Delta \mathbf{Y} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \text{ ou } \mathbf{z} \notin \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}\}$
Produto Cartesiano	$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$

Outline

Conjuntos de Valores

A coleção de pontos, conjuntos de pontos e escalares e das operações que vimos formam uma *álgebra heterogênea*

Conjuntos operados podem conter diferentes tipos de elementos com tipos específicos de operadores para cada elemento.

Já uma *álgebra homogênea* envolve conjuntos com um mesmo tipo de elementos e um conjunto fixo de operadores sobre estes elementos.

Conjuntos de Valores

Chamaremos álgebras homogêneas aqui de *conjuntos de valores* e denotaremos por $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$.

Exemplos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_{2^k}$ (binários de comprimento k), $\mathbb{R}_{+\infty} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{R}_{-\infty} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\mathbb{R}_{\pm\infty} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e $\mathbb{R}_{\infty}^{\geq 0} = \mathbb{R}^{+} \cup \{0, +\infty\}$ (reais contendo $\pm\infty$ são chamados reais estendidos).

Conjuntos de Valores

Estruturas algébricas: conjunto + operações.

Exemplos:

$$(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +, \cdot)$$
$$(\mathbb{Z}, \vee, \wedge, +, \cdot)$$
$$(\mathbb{Z}_{2^k}, \vee, \wedge, +, \cdot)$$

cuidando que no terceiro caso a adição e multiplicação são $\mod 2^k$.

Em $\mathbb{C}$ (não ordenado) podemos ter:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot)$$

Conjuntos de Valores

Para $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ podemos ter

$$(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, +)$$

se assumirmos que:

$$\begin{array}{ll}
a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty & \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty} \\
a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty & \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty} \\
(-\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = -\infty & \\
a \vee (-\infty) = (-\infty) \vee a = a & \forall a \in \mathbb{R}_{\pm\infty} \\
a \vee (+\infty) = (+\infty) \vee a = (+\infty) & \forall a \in \mathbb{R}_{\pm\infty}
\end{array}$$

Tratando $+$ como uma multiplicação e $\vee$ como uma adição, $-\infty$ age como elemento nulo na estrutura acima.

Conjuntos de Valores

Temos também a estrutura *dual* de $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, +)$ em que $+\infty$ age como nulo, a qual será:

$$(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \wedge, +')$$

dado que

$$\begin{array}{ll}
a +' b = a + b & a, b \in \mathbb{R} \\
a +' (-\infty) = (-\infty) +' a = -\infty & a \in \mathbb{R}_{-\infty} \\
a +' (+\infty) = (+\infty) +' a = +\infty & a \in \mathbb{R}_{+\infty} \\
(-\infty) +' (+\infty) = (+\infty) +' (-\infty) = +\infty & \\
a \wedge (+\infty) = (+\infty) \wedge a = a & a \in \mathbb{R}_{\pm\infty} \\
a \wedge (-\infty) = (-\infty) \wedge a = -\infty & a \in \mathbb{R}_{\pm\infty}
\end{array}$$

Note que $+$ e $+'$ se equivalem exceto quando operam entre $-\infty$ e $+\infty$.

A estrutura conjunta $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$ é um *grupo ordenado aditivo de reticulado limitado*.

Conjuntos de Valores

A estrutura dual aditiva leva ao conceito de elemento *dual* (ou *conjugado*) aditivo r^* para todo $r \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$:

$$r^* \equiv \begin{cases} -r & \text{se } r \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{se } r = +\infty \\ +\infty & \text{se } r = -\infty \end{cases}$$

satisfazendo as seguintes leis:

$$\begin{aligned} (r^*)^* &= r \\ (r \vee t)^* &= r^* \wedge t^* \\ (r \wedge t)^* &= r^* \vee t^* \end{aligned}$$

Conjuntos de Valores

Similarmente, definimos o grupo ordenado de reticulado limitado *multiplicativo*:

$$(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \vee, \wedge, \times, \times')$$

em que $\times$ é a multiplicação convencional e $\times'$ sua dual, tal que:

$$\begin{array}{ll} a \times' b = a \times b & \forall a, b \in \mathbb{R}^{\geq 0} \\ a \times +\infty = +\infty \times a = +\infty & a \in \mathbb{R}^{+}_{+\infty} \\ a \times' +\infty = +\infty \times' a = +\infty & a \in \mathbb{R}^{+}_{+\infty} \\ 0 \times +\infty = +\infty \times 0 = 0 & \\ 0 \times' +\infty = +\infty \times' 0 = +\infty & \end{array}$$

0 é o elemento nulo em $(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \vee, \times)$ e $+\infty$ em $(\mathbb{R}^{\geq 0}_{+\infty}, \wedge, \times')$. O conjugado se define agora por:

$$r^* \equiv \begin{cases} r^{-1} & \text{se } r \in \mathbb{R}^{+} \\ 0 & \text{se } r = +\infty \\ +\infty & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

Conjuntos de Valores

Outra estrutura importante em imagens é $(\mathbb{Z}_2^*, \vee, \wedge, \tilde{+}, \tilde{+}')$ em que $\mathbb{Z}_2^* = (\mathbb{Z}_2)_{\pm\infty} = \{0, 1, -\infty, +\infty\}$.

As operações duais $\tilde{+}$ e $\tilde{+}'$ são tais que em $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$:

$$p \tilde{+} q = p \tilde{+}' q = \neg(p \text{ XOR } q) = p \leftrightarrow q$$

e incluindo $\pm\infty$:

$\tilde{+}$	0	1	$-\infty$	$+\infty$
0	1	0	$+\infty$	$-\infty$
1	0	1	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$\tilde{+}'$	0	1	$-\infty$	$+\infty$
0	1	0	$+\infty$	$-\infty$
1	0	1	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Conjuntos de Valores

Estas operações podem ser generalizadas para o produto cartesiano $\mathbb{Z}^*_{2^k} = \mathbb{Z}^*_2 \times \mathbb{Z}^*_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}^*_2$. Por exemplo, se $m = (m_1, \ldots, m_2)$ e $n = (n_1, \ldots, n_k)$:

$$m \tilde{+} n = (m_1 \tilde{+} n_1, \ldots, m_k \tilde{+} n_k)$$

Conjuntos de Valores - Considerações Finais

Operações unárias como log, exp, cos, etc., podem também ser definidas na estrutura.

Conjuntos de pontos como $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ são também conjuntos de valores e podemos definir estruturas como $(\mathbf{X}, +)$ em que $+$ é a adição de vetores.

Em muitas aplicações, podemos nos interessar por uma subálgebra. Por exemplo, a subálgebra $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ obtida de $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$ ou a subálgebra $(\mathbb{N}, \vee, \wedge, +)$ obtida de $(\mathbb{Z}, \vee, \wedge, +, \cdot)$.