Tópico 8 - Morfologia Matemática

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

1. Dilatação e Erosão
2. Formulação Algébrica
3. Propriedades
4. Abertura e Fechamento

Morfologia Matemática

Morfologia matemática é o estudo da estrutura geométrica de imagens digitais usando elementos estruturantes.

Origem remonta a Minkowski e Hadwiger, mas concepção moderna formulada por Matheron e Serra.

Concebida originalmente para imagens binárias, mas estendida para imagens em tons de cinza por Sternberg e Serra.

Aplicações em realce, filtros, segmentação, esqueletonização, etc.

Morfologia Matemática

Geometria de conjunto desconhecido (imagem) obtido por comparação (operações de conjuntos) com elemento conhecido (elemento estruturante).

Veremos agora as operações básicas de dilatação e erosão.

Dilatação e Erosão

Dilatação e erosão são operações fundamentais na morfologia, podendo ser usadas na remoção de ruídos por exemplo, além de poderem ser combinadas em operações sofisticadas.

Morfologia usa a linguagem da teoria de conjuntos.

Em uma imagem binária, os *pixels* do objeto de interesse são os selecionados para se submeter à operação. Este são vistos como um conjunto de pontos no espaço Euclideano 2D.

Baseadas no conceito de adição e subtração de Minkowski.

Dilatação e Erosão

Dados dois conjuntos $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$, a adição de Minkowski é definida por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$$

e a subtração de Minkowski por

$$\mathbf{A}/\mathbf{B} = (\mathbf{A}' \times \mathbf{B}^*)',$$

em que $\mathbf{A}'$ é o complemento de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin \mathbf{A}\}$$

e $\mathbf{B}^*$ denota a reflexão de $\mathbf{B}$ ao redor da origem $\mathbf{0} = \{0, 0, \ldots, 0\} \in \mathbb{R}^n$:

$$B^* = \{-\mathbf{b} : \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$$

Dilatação e Erosão

Definindo-se

$$\mathbf{A_b} = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}$$

e

$$\mathbf{B_p} = \{\mathbf{b} + \mathbf{p} : \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$$

podemos reformular a expressão da adição de Minkowski:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \bigcup_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}} \mathbf{A_b} = \{\mathbf{p} : \mathbf{B_p^*} \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\}.$$

Similarmente, redefinimos a subtração:

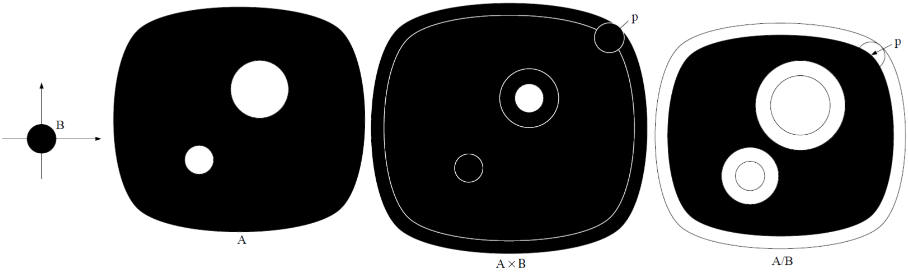
$$\mathbf{A}/\mathbf{B} = \bigcap_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}^*} \mathbf{A_b} = \{\mathbf{p} : \mathbf{B_p} \subset \mathbf{A}\}.$$

Estas equações formam a base dos conceitos de **dilatação** e **erosão** morfológica.

Dilatação e Erosão

Se **B** contém a origem **0**, **A** $\times$ **B** é o conjunto de todos os pontos **p** tais que a translação de **B*** por **p** intersecciona **A**.

Já **A**/**B** é o conjunto de todos os pontos **p** tais que a translação de **B** por **p** está completamente contida dentro de **A**.



Dilatação e Erosão

A **dilatação** de uma imagem binária **a** por um **elemento estruturante B** resulta em outra imagem binária **b** definida por

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Já a **erosão** de uma imagem binária **a** por um **elemento estruturante B** resulta em outra imagem binária **b** definida por

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap (\mathbf{A}/\mathbf{B}) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dilatação e Erosão

Outra forma de fazer estas operações é usando os operadores *max* e *min* ou ainda os lógicos *AND* e *OR*, de modo que a dilatação é expressa por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \max\{\mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbf{B}^*\}$$

e a erosão por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \min\{\mathbf{a}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in B\}.$$

Dilatação e Erosão

Na prática, a dilatação expande a imagem, preenchendo vales e buracos e aumentando a região.

Já a erosão remove picos de bordas, aumenta buracos internos e reduz regiões.

Há que se enfatizar que erosão e dilatação NÃO são operações inversas uma da outra.

O complemento da erosão é a dilatação do complemento da imagem dilatada pelo elemento estruturante refletido.

As notações abaixo também são comumente usadas para dilatação e erosão:

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b \qquad A \ominus B = \bigcap_{b \in B^*} A_b.$$

Dilatação e Erosão

Imagem Binária

			1			1		
			1				1	
		1	1		1	1		
	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1		1	
	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	1	

A

Elemento Estruturante

1	
1	1

B

Origem

Obs: A Imagem é representada por níveis 1 e o fundo por níveis 0 (não mostrado).

			1			1		
			1	1		1	1	
		1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1

$A \oplus B$

		1	1		1			
	1	1	1	1				
	1	1	1	1	1			
	1	1	1	1	1	1		

$A \ominus B$

Outline

1 Dilatação e Erosão

2 Formulação Algébrica

3 Propriedades

4 Abertura e Fechamento

Formulação Algébrica

Seja $\mathbf{a} \in \{0,1\}^{\mathbf{X}}$ a imagem original (geralmente $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^2$).

$\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ é o suporte de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{B}$ um elemento estruturante contendo a origem.

Definimos a vizinhança $N : \mathbf{X} \to 2^{\mathbf{X}}$:

$$N(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x} - \mathbf{y} \in B^*\}.$$

A formulação algébrica da dilatação de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{B}$ é:

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \boxed{\vee} N$$

e para a erosão:

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \boxed{\wedge} N^*.$$

Se $\mathbf{a}$ for substituído pelo complemento booleano $\mathbf{a}^c$ nas expressões acima, a dilação ou erosão é aplicada ao complemento do suporte de $\mathbf{a}$.

Formulação Alternativa

Podemos também formular dilatação e erosão em termos de operações imagem-*template*, facilitando assim a generalização para tons de cinza.

Seja $\mathbb{F}$ o subgrupo limitado $\{-\infty, 0, \infty\}$ de $\mathbb{R}_{\pm\infty}$.

Seja também o *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p}, \mathbf{p} \in \mathbf{B}^* \\ -\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, a dilatação de **a** por **B** pode ser expressa por

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \boxed{\vee} \mathbf{t}$$

e a erosão por

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \boxed{\wedge} \mathbf{t}^*.$$

Formulação Alternativa

Podemos escrever também em termos das operações de reticulado $\textcircled{\vee}$ e $\textcircled{\wedge}$

Seja $\mathbb{F} = \{0, 1, \infty\}$ e $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$:

$$\mathbf{t_y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p}, \mathbf{p} \in \mathbf{B}^* \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A dilatação de **a** por **B** é dada por

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \textcircled{\vee} \mathbf{t}$$

e a erosão por

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} \textcircled{\wedge} \bar{\mathbf{t}}$$

Outline

1 Dilatação e Erosão

2 Formulação Algébrica

3 Propriedades

4 Abertura e Fechamento

Propriedades

$$\mathbf{A} \subset (\mathbf{A} \times \mathbf{B})/\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}/\mathbf{B}) \times \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}/\mathbf{B})/\mathbf{C} = \mathbf{A}/(\mathbf{B}/\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}/\mathbf{C}) \subset (\mathbf{A} \times \mathbf{B})/\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}/(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A}/\mathbf{B}) \cap (\mathbf{A}/\mathbf{C})$$

Outline

1 Dilatação e Erosão

2 Formulação Algébrica

3 Propriedades

4 Abertura e Fechamento

Abertura e Fechamento

Erosão e dilatação aparecem comumente em conjunto: dilatação após erosão ou vice-versa

Em ambos os casos, detalhes menores que o elemento estruturante são removidos sem distorções geométricas

A abertura de A por B, denotada $A \circ B$ consiste em uma erosão seguida por dilatação:

$$A \circ B = (A/B) \times B$$

Esta operação é classicamente usada na remoção de ruídos: erosão remove pontos pretos isolados e dilatação restaura o objeto de interesse

Abertura e Fechamento

Permite também a separação de objetos próximos

Já o fechamento faz dilatação seguida por erosão:

$$A \bullet B = (A \times B)/B$$

Esta pode ser usada para preencher *pixels* brancos ruidosos

Serve também para tampar "buracos" na imagem original

Abertura e Fechamento - Formulação Algébrica

Seja a imagem $\mathbf{a} \in \{0,1\}^{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{B}$ um elemento estruturante contendo a origem. Definimos então a função de vizinhança $N : \mathbf{X} \to 2^{\mathbf{X}}$:

$$N(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in \mathbf{B}\}$$

Temos então a abertura de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{B}$ expressa por

$$\mathbf{b} := (\mathbf{a} \boxed{\wedge} N^*) \boxed{\vee} N$$

e o fechamento por

$$\mathbf{b} := (\mathbf{a} \boxed{\vee} N) \boxed{\wedge} N^*$$