Tópico 6 - Descritores de Texturas

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Descritores de Imagens

Matrizes de coocorrência propostas por Haralick em 1973 para imagens de textura

Abordagem estatística mais refinada do que histograma

Estatísticas obtidas a partir de como *pixels* se organizam em vizinhanças - Dá origem a toda uma família de métodos, e.g. LBP

Seja o conjunto de pontos $\mathbf{X} = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ e G o número de valores possíveis para os *pixels* e uma imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_G^{\mathbb{X}}$

Descritores de Imagens

Definimos então a seguinte distribuição conjunta:

$$\mathbf{s}(\Delta x, \Delta y : i, j) = \mathit{probabilidade}\{\mathbf{a}(x, y) = i \text{ e } \mathbf{a}(x + \Delta x, y + \Delta y) = j\}$$

em que $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{Z}$.

Podemos também usar coordenadas polares, definindo $\theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ e $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.
Temos assim:

$$\mathbf{s}(d, \theta : i, j) = \mathit{probabilidade}\{\mathbf{a}(x, y) = i \text{ e } \mathbf{a}(x + d\cos\theta, y + d\sin\theta) = j\}$$

Temos assim a distribuição da coocorrência de pares de valores para cada distância e cada direção.

Descritores de Imagens

É usual que se discretize θ para $0°$, $45°$, $90°$ e $135°$. Distâncias não-Euclideanas (*chessboard* ou *cityblock* por exemplo) são também comuns.

Define-se então uma matriz $\mathbf{s}(d, \theta)$, chamada de **dependência espacial**, com dimensões $G \times G$ tal que

$$\mathbf{s}(d, \theta)_{ij} = \mathbf{s}(d, \theta : i, j)$$

Note que a indexação desta matriz começa em $(0, 0)$: $0 \leq i, j \leq G - 1$.

Na prática, a matriz é calculada usando Δx e Δy de acordo com a distância e ângulo (horizontal, vertical ou diagonal para intervalos de $45°$).

Descritores de Imagens

Temos de fato:

$$\mathbf{s}(\Delta x, \Delta y : i, j) = card\{(x, y) : \mathbf{a}(x, y) = i \text{ e } \mathbf{a}(x + \Delta x, y + \Delta y) = j\}$$

Considere por exemplo $\mathbf{X} = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ e a imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_3^{\mathbf{X}}$ abaixo:

1	0	0	2
0	1	1	1
2	2	1	0
1	0	1	0

Usando distância *chessboard* $\max\{|\Delta x, \Delta y|\}$ teríamos

$$\mathbf{s}(1, 0^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}(1, 45^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(1, 135^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}(2, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Descritores de Imagens

Na **matriz de coocorrência** não se distingue entre $\mathbf{s}(d, \theta : i, j)$ e $\mathbf{s}(d, \theta : j, i)$, gerando assim:

$$\mathbf{c}(d, \theta) = \mathbf{s}(d, \theta) + \mathbf{s}'(d, \theta)$$

No nosso exemplo:

$$\mathbf{c}(1, 0^\circ) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}(1, 45^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}(1, 135^\circ) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}(2, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A simetria da coocorrência implica que

$$\mathbf{c}(d, \theta) = \mathbf{c}(d, \theta + \pi)$$

e por isso apenas ângulos entre 0 e π bastam.

Outline

Descritores de Imagens

Da coocorrência obtemos distribuições marginais:

$$\mathbf{c}_x(d, \theta : i) = \sum_j \mathbf{c}(d, \theta : i, j)$$

$$\mathbf{c}_y(d, \theta : j) = \sum_i \mathbf{c}(d, \theta : i, j)$$

bem como suas médias e variâncias:

$$\mu_x(d, \theta) = \sum_i i\mathbf{c}_x(d, \theta : i)$$

$$\mu_y(d, \theta) = \sum_j j\mathbf{c}_y(d, \theta : j)$$

$$\sigma_x^2(d, \theta) = \sum_i (i - \mu_x(d, \theta))^2 \mathbf{c}_x(d, \theta : i)$$

$$\sigma_y^2(d, \theta) = \sum_j (j - \mu_y(d, \theta))^2 \mathbf{c}_y(d, \theta : j).$$

Descritores de Imagens

Algumas das medidas mais comumente extraídas da matriz de coocorrências são:

Energia:

$$\sum_i \sum_j \{\mathbf{c}(d, \theta : i, j)\}^2$$

Entropia:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{c}(d, \theta : i, j) \log(\mathbf{c}(d, \theta : i, j))$$

Correlação:

$$\frac{\sum_i \sum_j (i - \mu_x(d, \theta))(j - \mu_y(d, \theta))\mathbf{c}(d, \theta : i, j)}{\sigma_x(d, \theta)\sigma_y(d, \theta)}$$

Momento diferencial inverso:

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{1 + (i - j)^2} \mathbf{c}(d, \theta : i, j)$$

Descritores de Imagens

Inércia:

$$\sum_i \sum_j (i-j)^2 \mathbf{c}(d,\theta : i,j).$$

Formulação Algébrica:
Seja $\mathbf{X}$ uma grade retangular $m \times n$ e G o número de níveis de cinza.

A imagem original é então $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_G^{\mathbf{X}}$.

Usamos ainda distâncias do tipo *chessboard* $d \in \mathbb{Z}^+$ e direções $\theta \in \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$.

Em seguida definimos a função de vizinhança

$$N(x,y) = \{(x+\Delta x, y+\Delta y)\}$$

Descritores de Imagens

Então a "imagem" da matriz de dependência *mathbfs* é obtida por

for $i := 0$ **to** $G-1$ **loop**
  for $j := 0$ **to** $G-1$ **loop**
    $\mathbf{s}(\Delta x, \Delta y)(i,j) := \sum \chi_2[\chi_i(\mathbf{a}) + \chi_j(\mathbf{a}) \oplus N]$
  end loop
end loop

No caso da coocorrência temos

$$\mathbf{c}(\Delta x, \Delta y) := \mathbf{s}(\Delta x, \Delta y) + s'(\Delta x, \Delta y).$$

Descritores de Imagens

Para as probabilidades marginais teremos

for $i := 0$ **to** $G-1$ **loop**
    for $j := 0$ **to** $G-2$ **loop**
        $\mathbf{c}_x(\Delta x, \Delta y)(i) := \mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)(i,j) + \mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)(i,j+1)$
    end loop
end loop

for $i := 0$ **to** $G-1$ **loop**
    for $j := 0$ **to** $G-2$ **loop**
        $\mathbf{c}_y(\Delta x, \Delta y)(j) := \mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)(i,j) + \mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)(i+1,j)$
    end loop
end loop

Descritores de Imagens

Podemos definir agora a imagem identidade $\mathbf{i} \in (\mathbb{Z}_G)^{\mathbb{Z}_G}$ e assim as médias e variâncias:

$$\mu_x(\Delta x, \Delta y) = \sum \mathbf{i} \cdot \mathbf{c}_x(\Delta x, \Delta y)$$

$$\mu_y(\Delta x, \Delta y) = \sum \mathbf{i} \cdot \mathbf{c}_y(\Delta x, \Delta y)$$

$$\sigma_x^2(\Delta x, \Delta y) = \sum (\mathbf{i} - \mu_x(\Delta x, \Delta y))^2 \cdot \mathbf{c}_x(\Delta x, \Delta y)$$

$$\sigma_y^2(\Delta x, \Delta y) = \sum (\mathbf{i} - \mu_y(\Delta x, \Delta y))^2 \cdot \mathbf{c}_y(\Delta x, \Delta y).$$

Descritores de Imagens

Finalmente temos as medidas estatísticas:
Energia:

$$E := \sum [\mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)]^2$$

Entropia:

$$Entrp := \sum \mathbf{c}(\Delta x, \Delta y) \cdot \log(\mathbf{c}(\Delta x, \Delta y))$$

Correlação:

$$C := \frac{[\sum(\mathbf{p}_1 - \mu_x(\Delta x, \Delta y))(\mathbf{p}_2 - \mu_y(\Delta x, \Delta y))\mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)]}{\sigma_x(\Delta x, \Delta y)\sigma_y(\Delta x, \Delta y)}$$

em que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in (\mathbb{Z}_G)^{\mathbf{Y}}$ são projeções em uma grade $\mathbf{Y}$ de dimensões $G \times G$ dadas por

$$\mathbf{p}_1(i,j) = i \qquad \mathbf{p}_2(i,j) = j.$$

Momento diferencial inverso:

$$IDM := \sum \frac{\mathbf{c}(\Delta x, \Delta y)}{1 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}$$

Descritores de Imagens

Inércia:

$$I := \sum (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \cdot \mathbf{c}(\Delta x, \Delta y).$$