Tópico 1 - Introdução a Álgebra de Imagens

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Template

Templates generalizados são imagens cujos valores são também imagens.

Generalizam conceitos importantíssimos como máscaras, janelas, vizinhanças, elementos estruturantes de morfologia, etc.

Template

Definição

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ conjuntos de coordenadas (pontos).

Um *template* é uma imagem em que cada ponto (*pixel*) é associado a uma outra imagem (função).

Particularmente, um *template* $\mathbb{F}$-valorado de $\mathbf{Y}$ para $\mathbf{X}$ é uma função $\mathbf{t} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$. Deste modo, $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$ e $\mathbf{t}$ é uma imagem $\mathbb{F}^{X}$-valorada em $\mathbf{Y}$.

Template

Notação

Para simplificar a notação, definimos $\mathbf{t_y} \equiv \mathbf{t}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. A imagem $\mathbf{t_y}$ tem então a seguinte representação:

$$\mathbf{t_y} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{t_y}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

Os valores dos *pixels* na imagem $\mathbf{t_y}(\mathbf{x})$ são chamados de *pesos* do *template* em $\mathbf{y}$.

Template

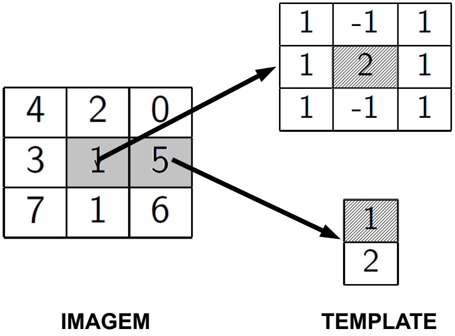


Imagem em $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ (em cinza) contendo os pontos associados a um *template*.

Cada $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ é associado a um *template* 3×3 à direita.

O ponto correspondente a $\mathbf{y}$ no *template* está hachurado.

Template

No "padrão Matlab", teríamos os pesos $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ no 1º ponto $\mathbf{y} = (2, 2)$ como:

$$\mathbf{t}_{(2,2)}(1,1) = 1 \qquad \mathbf{t}_{(2,2)}(1,2) = -1 \qquad \mathbf{t}_{(2,2)}(1,3) = 1$$

$$\mathbf{t}_{(2,2)}(2,1) = 1 \qquad \mathbf{t}_{(2,2)}(2,2) = 2 \qquad \mathbf{t}_{(2,2)}(2,3) = 1$$

$$\mathbf{t}_{(2,2)}(3,1) = 1 \qquad \mathbf{t}_{(2,2)}(3,2) = -1 \qquad \mathbf{t}_{(2,2)}(1,3) = 1$$

Já para o 2º ponto $(2, 3)$:

$$\mathbf{t}_{(2,3)}(2,3) = 1 \qquad \mathbf{t}_{(2,3)}(3,3) = 2$$

Template

NOTA 1: É comum que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ (mas não obrigatório).

NOTA 2: Pesos definidos em todo o domínio $\mathbf{X}$ da imagem original.

NOTA 2.1: Porém costumam ser 0 ou $-\infty$ fora de uma região particular (ver noção de *suporte* a seguir). Na figura, não mostramos esta região para o 2º ponto.

NOTA 3: Note que os pesos e a forma do *template* mudaram entre os dois pontos. Veja a seguir mais sobre isso.

Template

Templates são muito mais flexíveis do que o conceito de máscara que conhecemos. Algumas razões:

1. A forma do *template* não precisa ser quadrada (nem mesmo retangular e nem mesmo conexa)
2. Esta forma também pode variar em cada ponto **y**
3. Os pesos também podem variar em cada **y**
4. Ponto **y** não precisa estar no centro e nem mesmo "embaixo" do *template*
5. Operações entre *templates* e imagens vão muito além da convolução que conhecemos, como veremos em breve

Outline

Template - suporte

Suporte de $\mathbf{t_y}$:

$$S(\mathbf{t_y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{t_y}(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$

Sobre estruturas algébricas gerais, define-se em relação ao elemento neutro da operação.

Para os reais estendidos temos o *suporte em* $+\infty$ *e* $-\infty$:

$$S_{\infty}(\mathbf{t_y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{t_y}(\mathbf{x}) \neq \infty\}.$$

$$S_{-\infty}(\mathbf{t_y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{t_y}(\mathbf{x}) \neq -\infty\}.$$

Template - invariância a translação

Se $(\mathbf{X}, +)$ forma um grupo, então o *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{X}}$ é *invariante a translação* se para qualquer tripla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ temos

$$\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\mathbf{y}+\mathbf{z}}(\mathbf{x} + \mathbf{z}).$$

EXEMPLO: Seja $\mathbf{X} = \mathbb{Z}^2$ e $\mathbf{y} = (x, y)$ um ponto arbitrário de $\mathbf{X}$. Vamos também definir

$$\mathbf{x}_1 = (x, y - 1), \qquad \mathbf{x}_2 = (x + 1, y) \qquad \mathbf{x}_3 = (x + 1, y - 1).$$

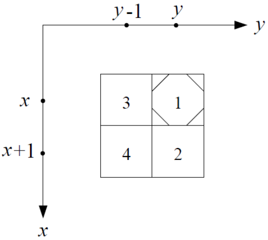
Template - invariância a translação

Vamos então definir o *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{X}}$ com os seguintes pesos:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = 1, \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1) = 3, \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_2) = 2, \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_3) = 4$$

e $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer $\mathbf{x}$ fora que $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$.

A Figura abaixo ilustra graficamente o *template* agindo como uma "janela deslizante".



Template

Para verificar a invariância a translação podemos partir, por exemplo, de

$$\mathbf{t_y}(\mathbf{x}_1) = 3$$

e escolher $\mathbf{z} = (1, 1)$. Vamos então atualizar $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y} + \mathbf{z} = (x + 1, y + 1) \qquad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{z} = (x + 1, y).$$

Mas, se as coordenadas atualizadas de $\mathbf{y}$ forem renomeadas para (x, y), então as coordenadas de $\mathbf{x}$ atualizado passam a ser escritas como $(x, y - 1)$, o que é exatamente a definição de $\mathbf{x}_1$. Portanto

$$\mathbf{t_{y+z}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{z}) = \mathbf{t_y}(\mathbf{x}_1)$$

NOTA: Todo *template* que possa ser representado como uma janela deslizante com pesos fixos é invariante a translação.

Template parametrizado

Definição

Um *template* $\mathbb{F}$-valorado parametrizado de $\mathbf{Y}$ em $\mathbf{X}$ com parâmetros em P é uma função $\mathbf{t} : P \to (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$.

P é chamado *conjunto de parâmetros* e cada $p \in P$ é um parâmetro de $\mathbf{t}$.

Na prática, este tipo de *template* gera uma família de *templates* $\mathbb{F}$-valorados de $\mathbf{Y}$ em $\mathbf{X}$:

$$\{\mathbf{t}(p) \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}} : p \in P\}.$$

Outline

Produto Entre Imagem e *Template*

Vamos tratar agora de operações que combinam imagens com *templates* e *templates* com *templates*, como correlação e convolução.

Sejam γ e $\circ$ duas operações binárias em $\mathbb{F}$, sendo que γ é associativa e comutativa e $\circ$ distribui sobre γ.

Seja então o *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$, i.e, para cada $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{t}_{\mathbf{y}} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$.

Seja ainda a imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$, com $\mathbf{X}$ finito.

Produto Entre Imagem e *Template*

Para cada $\mathbf{y}$, podemos operar $\mathbf{a} \circ \mathbf{t_y} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$.

E ainda fazer a operação de redução global induzida por γ: $\Gamma(\mathbf{a} \circ \mathbf{t_y}) \in \mathbb{F}$.

Chegamos assim à seguinte operação binária induzida:

$$\textcircled{\gamma} : \mathbb{F}^{\mathbf{X}} \times (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}} \to \mathbb{F}^{\mathbf{Y}},$$

expressa por

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \textcircled{\gamma} \mathbf{t} \in \mathbb{F}^{\mathbf{Y}}$$

definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a} \circ \mathbf{t_y}) = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}[\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t_y}(\mathbf{x})].$$

Produto Entre Imagem e *Template*

Se $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = (\mathbf{a}(\mathbf{x}_1) \circ \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1))\gamma(\mathbf{a}(\mathbf{x}_2) \circ \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_2))\gamma \ldots \gamma(\mathbf{a}(\mathbf{x}_n) \circ \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_n)),$$

expressão esta chamada de *convolução à direita de* **a** *com* **t**.

Note que o domínio da imagem de saída é **Y** e não mais **X** como na original.

Se o grupo $(\mathbb{F}, \gamma, \circ)$ em questão for $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, então

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{t}$$

é o chamado produto linear imagem-*template* ou simplesmente convolução de **a** com **t**, tal que

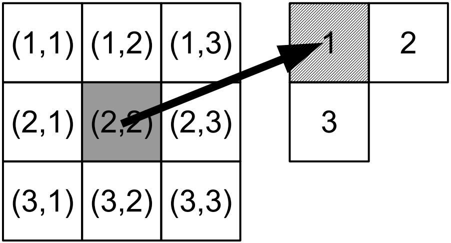
$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})].$$

Outline

Produto Entre Imagem e *Template*

Um *template* $\mathbf{s} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{Y}})^{\mathbf{X}}$ tem seu transposto $\mathbf{s}'$ definido por $\mathbf{s}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$.

EXEMPLO (INVARIANTE A ESCALA):

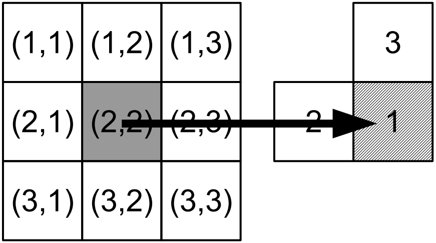


$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{t}_{(1,1)}(1,1) = 1 & \mathbf{t}_{(1,1)}(1,2) = 2 & \mathbf{t}_{(1,1)}(2,1) = 3 \\
\mathbf{t}_{(1,2)}(1,2) = 1 & \mathbf{t}_{(1,2)}(1,3) = 2 & \mathbf{t}_{(1,2)}(2,2) = 3 \\
\mathbf{t}_{(2,1)}(2,1) = 1 & \mathbf{t}_{(2,1)}(2,2) = 2 & \mathbf{t}_{(2,1)}(3,1) = 3 \\
\mathbf{t}_{(2,2)}(2,2) = 1 & \mathbf{t}_{(2,2)}(2,3) = 2 & \mathbf{t}_{(2,2)}(3,2) = 3
\end{array}
$$

Produto Entre Imagem e *Template*

TRANSPOSTO:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{t}_{(1,1)}(1,1) = 1 & \mathbf{t}_{(1,2)}(1,1) = 2 & \mathbf{t}_{(2,1)}(1,1) = 3 \\
\mathbf{t}_{(1,2)}(1,2) = 1 & \mathbf{t}_{(1,3)}(1,2) = 2 & \mathbf{t}_{(2,2)}(1,2) = 3 \\
\mathbf{t}_{(2,1)}(2,1) = 1 & \mathbf{t}_{(2,2)}(2,1) = 2 & \mathbf{t}_{(3,1)}(2,1) = 3 \\
\mathbf{t}_{(2,2)}(2,2) = 1 & \mathbf{t}_{(2,3)}(2,2) = 2 & \mathbf{t}_{(3,2)}(2,2) = 3
\end{array}
$$



Produto Entre Imagem e *Template*

Assim, $\mathbf{s}'_\mathbf{y} \circ \mathbf{a} \in \mathbb{F}^\mathbf{X}$ e $\Gamma(\mathbf{s}'_\mathbf{y}(\mathbf{a})) \in \mathbb{F}$ gerando a operação induzida:

$$\gamma : (\mathbb{F}^\mathbf{Y})^\mathbf{X} \times \mathbb{F}^\mathbf{X} \to \mathbb{F}^\mathbf{Y},$$

sendo

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \gamma \mathbf{a} \in \mathbb{F}^\mathbf{Y}$$

definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{s}'_\mathbf{y} \circ \mathbf{a}) = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}[s'_\mathbf{y}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{a}(\mathbf{x})].$$

$\mathbf{s} \gamma \mathbf{a}$ é o produto de convolução à esquerda de $\mathbf{a}$ com $\mathbf{s}$.

Também pode ser escrito sem usar transposto:

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}(\mathbf{s}_\mathbf{x}(\mathbf{y}) \circ \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

Produto Entre Imagem e *Template*

Seja agora $(\mathbb{F}, \gamma)$ um monoide: operação binária associativa γ com um elemento identidade denotado por 0.

Seja a imagem $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$ e o *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{Y}}$, em que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ são subconjuntos do mesmo espaço.

Como $\mathbb{F}$ é monoide podemos estender o operador $\textcircled{\gamma}$:

$$\textcircled{\gamma} : \mathbb{F}^{\mathbf{X}} \times (\mathbb{F}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{Y}} \to \mathbb{F}^{\mathbf{Y}},$$

em que $\mathbf{b} = \mathbf{a} \textcircled{\gamma} \mathbf{t}$ é definido por

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Z}}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) & \text{se } \mathbf{X} \cap \mathbf{Z} \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \mathbf{X} \cap \mathbf{Z} = \emptyset. \end{cases}$$

Produto Entre Imagem e *Template*

Semelhantemente, podemos reduzir cálculos computacionais nestas operações se $(\mathbb{F}, \gamma, \circ)$ for um semi-anel comutativo (não exige inverso aditivo para todos os elementos).

Recordando a noção de suporte de um *template* podemos escrever:

$$\Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Z}}[\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t_y}(\mathbf{x})] = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S(\mathbf{t_y})}[\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t}(\mathbf{y})].$$

Isto implica que o cálculo do novo valor para o *pixel* $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ não depende do tamanho de $\mathbf{X}$, mas sim de $S(\mathbf{t_y})$ e se $k = card(\mathbf{X} \cap S(\mathbf{t_y}))$, então o cálculo de $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ envolve $2k - 1$ operações de γ e $\circ$.

Produto Entre Imagem e *Template*

A substituição de $(\mathbb{F}, \gamma, \circ)$ por diferentes conjuntos de valores e operações binárias gera uma grande variedade de transformações de imagens.

Produto Entre Imagem e *Template*

EXEMPLO: o anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ se generaliza para a estrutura $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$ gerando os dois produtos de reticulados seguintes, chamados de *operador de convolução max morfológico*:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \boxed{\vee} \mathbf{t},$$

em que

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{-\infty}(\mathbf{t_y})} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{t_y}(\mathbf{x})].$$

e *operador de convolução min morfológico*:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \boxed{\wedge} \mathbf{t},$$

em que

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{\infty}(\mathbf{t_y})} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) +' \mathbf{t_y}(\mathbf{x})].$$

Produto Entre Imagem e *Template*

Temos ainda as operações max e min morfológicos à esquerda:

$$\mathbf{t}\boxed{\vee}\mathbf{a} = \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{-\infty}(\mathbf{t}'_{\mathbf{y}})} [\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \mathbf{a}(\mathbf{x})], \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \right\}$$

$$\mathbf{t}\boxed{\wedge}\mathbf{a} = \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{\infty}(\mathbf{t}'_{\mathbf{y}})} [\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) +' \mathbf{a}(\mathbf{x})], \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \right\}$$

Estas operações se relacionam por dualidade:

$$\mathbf{a}\boxed{\wedge}\mathbf{t} = (\mathbf{t}^*\boxed{\vee}\mathbf{a}^*)^*$$

Produto Entre Imagem e *Template*

A estrutura $(\mathbb{R}_{\infty}^{\geq 0}, \vee, \wedge, \times, \times')$ também provê operações correspondentes, chamadas de *máximo* e *mínimo multiplicativo*:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \boxed{\vee} \mathbf{t},$$

em que

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S(\mathbf{t_y})} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t_y}(\mathbf{x})].$$

e

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \boxed{\wedge} \mathbf{t},$$

em que

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{\infty}(\mathbf{t_y})} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times' \mathbf{t_y}(\mathbf{x})].$$

Produto Entre Imagem e *Template*

Temos também o *max* e *min multiplicativo à esquerda*:

$$\mathbf{t}\boxed{\vee}\mathbf{a} = \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}\cap S(\mathbf{t}'_\mathbf{y})} [\mathbf{t}_\mathbf{x}(\mathbf{y}) \times \mathbf{a}(\mathbf{x})], \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \right\}$$

$$\mathbf{t}\boxed{\wedge}\mathbf{a} = \left\{ (\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}\cap S_\infty(\mathbf{t}'_\mathbf{y})} [\mathbf{t}_\mathbf{x}(\mathbf{y}) \times' \mathbf{a}(\mathbf{x})], \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \right\},$$

as quais se relacionam por dualidade:

$$\mathbf{a}\boxed{\wedge}\mathbf{t} = (\mathbf{t}^*\boxed{\vee}\mathbf{a}^*)^*,$$

em que r^* é o conjugado de r em $\mathbb{R}_\infty^{\geq 0}$.

Outline

Exemplos

Considere a imagem **a** e o *template* **t** seguintes:

1	2	3
0	-1	1
4	5	6

a

1	2
	-1

t

Exemplos

A convolução à direita $\mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{t}$ é obtida por $\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(1,1) = \quad & (\mathbf{a}(1,1) \cdot \mathbf{t}_{(1,1)}((1,1)) + (\mathbf{a}(2,1) \cdot \mathbf{t}_{(1,1)}(2,1)) = (1 \cdot 2) + (0 \cdot (-1)) = 2 \\
\mathbf{b}(1,2) = \quad & (\mathbf{a}(1,1) \cdot \mathbf{t}_{(1,2)}((1,1)) + (\mathbf{a}(1,2) \cdot \mathbf{t}_{(1,2)}(1,2)) + (\mathbf{a}(2,2) \cdot \mathbf{t}_{(1,2)}(2,2)) \\
& = (1 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + ((-1) \cdot (-1)) = 6 \\
\mathbf{b}(1,3) = \quad & (\mathbf{a}(1,2) \cdot \mathbf{t}_{(1,3)}((1,2)) + (\mathbf{a}(2,3) \cdot \mathbf{t}_{(1,3)}(2,3)) + (\mathbf{a}(1,3) \cdot \mathbf{t}_{(1,3)}(1,3)) \\
& = (2 \cdot 1) + (1 \cdot (-1)) + (3 \cdot 2) = 7 \\
\vdots \\
\mathbf{b}(3,3) = \quad & (\mathbf{a}(3,2) \cdot \mathbf{t}_{(3,3)}((3,2)) + (\mathbf{a}(3,3) \cdot \mathbf{t}_{(3,3)}(3,3)) = (5 \cdot 1) + (6 \cdot 2) = 17
\end{aligned}$$

Exemplos

1 2	2	3
0 -1	-1	1
4	5	6

$\Rightarrow$

2		

Exemplos

1 1	2 2	3
0	-1 -1	1
4	5	6

$\Rightarrow$

2	6	

Exemplos

1	2	3
0 1	-1 2	1
4	5 -1	6

$\Rightarrow$

2	6	
	-7	

Exemplos

Resultado final:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -4 & -7 & -5 \\ 8 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Calculamos agora o max morfológico (máximo aditivo) $a \boxed{\vee} t$:
$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{-\infty}(\mathbf{t_y})} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{t_y}(\mathbf{x})]$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}(1,1) = \quad & (\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{t}_{(1,1)}((1,1)) \vee (\mathbf{a}(2,1) + \mathbf{t}_{(1,1)}(2,1)) = (1+2) \vee (0-1) = 3 \\
\mathbf{b}(1,2) = \quad & (\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{t}_{(1,2)}((1,1)) \vee (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(1,2)) \vee (\mathbf{a}(2,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(2,2)) \\
& = (1+1) \vee (2+2) \vee ((-1)+(-1)) = 4 \\
\mathbf{b}(1,3) = \quad & (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,3)}((1,2)) \vee (\mathbf{a}(2,3) + \mathbf{t}_{(1,3)}(2,3)) \vee (\mathbf{a}(1,3) + \mathbf{t}_{(1,3)}(1,3)) \\
& = (2+1) \vee (1+(-1)) \vee (3 \cdot 2) = 5 \\
\vdots \\
\mathbf{b}(3,3) = \quad & (\mathbf{a}(3,2) + \mathbf{t}_{(3,3)}((3,2)) \vee (\mathbf{a}(3,3) + \mathbf{t}_{(3,3)}(3,3)) = (5+1) \vee (6+2) = 8
\end{aligned}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}
$$

Exemplos

Vejamos agora o mínimo aditivo $a \boxed{\wedge} t$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}(1,1) = \quad & (\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{t}_{(1,1)}((1,1)) \wedge (\mathbf{a}(2,1) + \mathbf{t}_{(1,1)}(2,1)) = (1+2) \wedge (0-1) = -1 \\
\mathbf{b}(1,2) = \quad & (\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{t}_{(1,2)}((1,1)) \wedge (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(1,2)) \wedge (\mathbf{a}(2,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(2,2)) \\
& = (1+1) \wedge (2+2) \wedge ((-1)+(-1)) = -2 \\
\mathbf{b}(1,3) = \quad & (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,3)}((1,2)) \wedge (\mathbf{a}(2,3) + \mathbf{t}_{(1,3)}(2,3)) \wedge (\mathbf{a}(1,3) + \mathbf{t}_{(1,3)}(1,3)) \\
& = (2+1) \wedge (1+(-1)) \wedge (3 \cdot 2) = 0 \\
\vdots \\
\mathbf{b}(3,3) = \quad & (\mathbf{a}(3,2) + \mathbf{t}_{(3,3)}((3,2)) \wedge (\mathbf{a}(3,3) + \mathbf{t}_{(3,3)}(3,3)) = (5+1) \wedge (6+2) = 6
\end{aligned}
$$

Resultado final:

$$
B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}
$$

Exemplos

Exemplificamos agora a convolução pela esquerda $\mathbf{b} = \mathbf{t} \oplus \mathbf{a}$ baseada no *template* transposto: $\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} (\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}))$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(1,1) = &\quad (\mathbf{a}(1,1) \cdot \mathbf{t}_{(1,1)}(1,1)) + (\mathbf{a}(1,2) \cdot \mathbf{t}_{(1,2)}(1,1)) = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 4 \\
\mathbf{b}(1,2) = &\quad (\mathbf{a}(1,2) \cdot \mathbf{t}_{(1,2)}(1,2)) + (\mathbf{a}(1,3) \cdot \mathbf{t}_{(1,3)}(1,2)) = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 7 \\
\vdots & \\
\mathbf{b}(3,3) = &\quad (\mathbf{a}(2,3) \cdot \mathbf{t}_{(2,3)}(3,3)) + (\mathbf{a}(3,3) \cdot \mathbf{t}_{(3,3)}(3,3)) = (1 \cdot (-1) + 6 \cdot 2) = 11
\end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & -3 & -1 \\ 13 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Máximo aditivo pela esquerda $\mathbf{b} = \mathbf{t} \boxed{\vee} \mathbf{a}$:
$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{-\infty}(\mathbf{t_y})} [\mathbf{t_x}(\mathbf{y}) + \mathbf{a}(\mathbf{x})]$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(1,1) = &\quad (\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{t}_{(1,1)}(1,1)) \vee (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(1,1)) = (1 + 2 \vee 2 + 1) = 3 \\
\mathbf{b}(1,2) = &\quad (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(1,2)) \vee (\mathbf{a}(1,3) + \mathbf{t}_{(1,3)}(1,2)) = (2 + 2 \vee 3 + 1) = 4 \\
\vdots & \\
\mathbf{b}(3,3) = &\quad (\mathbf{a}(2,3) + \mathbf{t}_{(2,3)}(3,3)) \vee (\mathbf{a}(3,3) + \mathbf{t}_{(3,3)}(3,3)) = (1 + (-1) \vee 6 + 2) = 8
\end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Mínimo aditivo pela esquerda $\mathbf{b} = \mathbf{t} \boxed{\wedge} \mathbf{a}$:
$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_\infty(\mathbf{t}'_\mathbf{y})} [\mathbf{t}_\mathbf{x}(\mathbf{y}) +' \mathbf{a}(\mathbf{x})]$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}(1,1) = &\quad (\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{t}_{(1,1)}(1,1)) \wedge (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(1,1)) = (1 + 2 \wedge 2 + 1) = 3 \\
\mathbf{b}(1,2) = &\quad (\mathbf{a}(1,2) + \mathbf{t}_{(1,2)}(1,2)) \wedge (\mathbf{a}(1,3) + \mathbf{t}_{(1,3)}(1,2)) = (2 + 2 \wedge 3 + 1) = 4 \\
\vdots & \\
\mathbf{b}(3,3) = &\quad (\mathbf{a}(2,3) + \mathbf{t}_{(2,3)}(3,3)) \wedge (\mathbf{a}(3,3) + \mathbf{t}_{(3,3)}(3,3)) = (1 + (-1) \wedge 6 + 2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
$$

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Qualquer operação binária γ em $\mathbb{F}$ induz uma operação em $(\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$ de modo que se $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$, então

$$(\mathbf{s}\gamma\mathbf{t}) \equiv \mathbf{s}_{\mathbf{y}}\gamma\mathbf{t}_{\mathbf{y}}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.$$

Por exemplo, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$ e $\gamma = +$:

$$(\mathbf{s} + \mathbf{t})_{\mathbf{y}} = \mathbf{s}_{\mathbf{y}} + \mathbf{t}_{\mathbf{y}},$$

ou seja, a operação corresponde à soma pontual entre as imagens $\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{t}_{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$.

Já entre as operações unárias temos a redução global. Se $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ é um conjunto finito de pontos e $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$, então a operação γ em $\mathbb{F}$ induz

$$\Gamma : (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}} \to \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$$

definida por

$$\Gamma\mathbf{t} = \Gamma_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{t}_{\mathbf{y}} = \mathbf{t}_{\mathbf{y}_1}\gamma \ldots \gamma\mathbf{t}_{\mathbf{y}_n}$$

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Exemplificando com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $\gamma = +$ temos

$$\sum \mathbf{t} = \mathbf{t}_{\mathbf{y}_1} + \cdots + \mathbf{t}_{\mathbf{y}_n}$$

correspondendo à soma de um número finito de imagens.

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Já no caso em que temos $(\mathbb{F}, \gamma, \circ)$ como um anel (ou semi-anel) podemos definir o produto de convolução entre *templates*:

$$\textcircled{\gamma} : (\mathbb{F}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{X}} \times (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}} \to (\mathbf{F}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{Y}}$$

definida de modo que dado $\mathbf{s} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{X}}$, $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$ e $\mathbf{X}$ um conjunto finito de pontos, então $\mathbf{r} = \mathbf{s} \textcircled{\gamma} \mathbf{t}$ é definido por

$$\mathbf{r_y}(\mathbf{z}) = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}(\mathbf{s_x}(\mathbf{z}) \circ \mathbf{t_y}(\mathbf{x})), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \text{ e } \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}.$$

No exemplo em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, temos $\mathbf{r} = \mathbf{s} \oplus \mathbf{t}$ dada por

$$\mathbf{r_y}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{s_x}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{t_y}(\mathbf{x}).$$

O produto de reticulado $\mathbf{r} = \mathbf{s} \boxed{\vee} \mathbf{t}$ se define similarmente para $\mathbf{s} \in (\mathbb{R}_{\pm\infty}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}_{\pm\infty}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$:

$$\mathbf{r_y}(\mathbf{z}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} [\mathbf{s_x}(\mathbf{z}) + \mathbf{t_y}(\mathbf{x})].$$

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Exemplos: Sejam $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$ com valores

$$\mathbf{s_y} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t_y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o produto $\mathbf{r} = \mathbf{s} \oplus \mathbf{t}$ lembrando que

$$\mathbf{r_y}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{s_x}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{t_y}(\mathbf{x}).$$

Deste modo:

$$\begin{aligned}
&r_{(2,2)}(1,1) = \\
&s_{(1,1)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(1,1) + s_{(1,2)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(1,2) + s_{(1,3)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(1,3) + \\
&s_{(2,1)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(2,1) + s_{(2,2)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(2,2) + s_{(2,3)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(2,3) + \\
&s_{(3,1)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(3,1) + s_{(3,2)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(3,2) + s_{(3,3)}(1,1) \cdot t_{(2,2)}(3,3) = \\
&2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \\
&0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + \\
&0 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot 0 = 1
\end{aligned}$$

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Mais um ponto:

$$
\begin{aligned}
&r_{(2,2)}(2,2) = \\
&s_{(1,1)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(1,1) + s_{(1,2)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(1,2) + s_{(1,3)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(1,3) + \\
&s_{(2,1)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(2,1) + s_{(2,2)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(2,2) + s_{(2,3)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(2,3) + \\
&s_{(3,1)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(3,1) + s_{(3,2)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(3,2) + s_{(3,3)}(2,2) \cdot t_{(2,2)}(3,3) = \\
&0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \\
&1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + \\
&0 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot 0 = 6
\end{aligned}
$$

No final o produto $\mathbf{r} = \mathbf{s} \oplus \mathbf{t}$ será:

$$
\mathbf{r_y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \underline{6} & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}
$$

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Já se $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in (\mathbb{R}_{\pm\infty}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$ são definidos com $-\infty$ fora do suporte, podemos obter o produto $\mathbf{r} = \mathbf{s} \boxed{\vee} \mathbf{t}$:

$$\mathbf{r_y} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & \underline{5} & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações Binárias e Unárias em *Template*

Vamos agora redefinir $\mathbf{t}$ para um *template* $\mathbb{R}_{\infty}^{\geq 0}$-valorado:

$$\mathbf{t_y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim podemos calcular $\mathbf{r} = \mathbf{s} \boxed{\vee} \mathbf{t}$:

$$\mathbf{r_y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \underline{6} & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A grande utilidade de produtos de *templates* resulta da seguinte igualdade válida em semi-anéis:

$$\mathbf{a}\gamma(\mathbf{s}\gamma\mathbf{t}) = (\mathbf{a}\gamma\mathbf{s})\gamma\mathbf{t},$$

o que permite, por exemplo, transformar uma convolução bidimensional no produto de duas unidimensionais, e assim reduzir cálculos.

Exemplos

Considere os *templates* a seguir:

$$\mathbf{s_y} = \begin{array}{|c|c|c|} \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline -1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

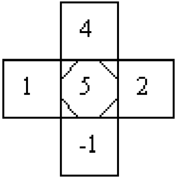
$$\mathbf{t_y} = \begin{array}{|c|c|c|} \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Exemplos

Vamos calcular a soma $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ usando um sistema de coordenadas centrado no *template*:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{(0,0)}(0,0) = \mathbf{s}_{(0,0)}(0,0) + \mathbf{t}_{(0,0)}(0,0) = 2 + 3 = 5 \\
&\mathbf{r}_{(0,0)}(1,0) = \mathbf{s}_{(0,0)}(1,0) + \mathbf{t}_{(0,0)}(1,0) = 0 + (-1) = -1 \\
&\mathbf{r}_{(0,0)}(-1,0) = \mathbf{s}_{(0,0)}(-1,0) + \mathbf{t}_{(0,0)}(-1,0) = 3 + 1 = 4 \\
&\mathbf{r}_{(0,0)}(0,1) = \mathbf{s}_{(0,0)}(0,1) + \mathbf{t}_{(0,0)}(0,1) = 1 + 1 = 2 \\
&\mathbf{r}_{(0,0)}(0,-1) = \mathbf{s}_{(0,0)}(0,-1) + \mathbf{t}_{(0,0)}(0,-1) = -1 + 2 = 1
\end{aligned}
$$

A solução final é dada por



Exemplos

Outra operação é a convolução $\mathbf{r} = \mathbf{s} \oplus \mathbf{t}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{(0,0)}(0,0) &= \mathbf{s}_{(0,0)}(0,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(0,0) + \mathbf{s}_{(1,0)}(0,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(1,0) + \\
&\quad \mathbf{s}_{(0,-1)}(0,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(0,-1) + \mathbf{s}_{(0,1)}(0,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(0,1) \\
&= 6 - 3 + 2 - 1 = 4 \\
\mathbf{r}_{(0,0)}(1,0) &= \mathbf{s}_{(1,0)}(1,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(1,0) = -2 \\
\mathbf{r}_{(0,0)}(-1,0) &= \mathbf{s}_{(-1,0)}(-1,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(-1,0) + \mathbf{s}_{(0,0)}(-1,0) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(0,0) \\
&= 2 + 9 = 11 \\
&\vdots \\
\mathbf{r}_{(0,0)}(1,1) &= \mathbf{s}_{(1,0)}(1,1) \cdot \mathbf{t}_{(0,0)}(1,0) = -1
\end{aligned}
$$

A solução final é dada por

		3		
	5	11	2	
-2	1	4	5	1
	1	-2	-1	

Outline

Vizinhanças

Um *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$ definido de modo que para cada $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ todos os valores no suporte de $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}$ correspondem à unidade para a operação em $\mathbb{F}$ é chamado de *template* unitário.

Por exemplo, o *template* invariante abaixo (chamado de Moore) $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$ é unitário em relação a $\mathbb{R}, +, \cdot$ já que 1 é o elemento unitário da multiplicação.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Já o *template* $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_{-\infty}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$ a seguir (chamado *template* de Von Neumann) é unitário em relação a $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$, já que 0 é unitário em relação a $+$.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

Vizinhanças

Se $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^2$ é uma matriz de $m \times n$ pontos, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2})^{\mathbb{Z}^2}$ é um *template* de Moore 3×3, então a imagem $\mathbf{b}$ obtida pela operação $\mathbf{b} := \mathbf{a} \oplus \mathbf{t}$ é dada por

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S(\mathbf{t}_\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S(\mathbf{t}(\mathbf{y}))} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot 1.$$

Aqui precisamos enfatizar a diferença entre a igualdade matemática $\mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{t}$ e a atribuição $\mathbf{b} := \mathbf{a} \oplus \mathbf{t}$. Esta última realiza cálculos apenas em pontos $\mathbf{y}$ para os quais $\mathbf{X} \cap S(\mathbf{t}_\mathbf{y}) \neq \emptyset$ (suporte). Podemos também escrever a expressão acima como

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap M(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}),$$

em que $M(\mathbf{y})$ é a vizinhança de Moore de $\mathbf{y}$. Isso nos leva ao conceito de *redução de vizinhança*.

Vizinhanças

Dada a operação binária γ em $\mathbb{F}$ podemos definir a redução de vizinhança

$$\Gamma : \mathbb{F}^{\mathbf{X}}|_N \to \mathbb{F},$$

em que $N \in (2^{\mathbf{X}})^{\mathbf{Y}}$ é a função de vizinhança e
$\mathbb{F}^{\mathbf{X}}|_N = \{\mathbf{a}|_{N(\mathbf{y})} : \mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$.

Por exemplo, se $\mathbb{F}^{\mathbf{X}} = \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$, $\mathbf{X} \subset \mathbf{Z}$ é uma grade de $m \times n$ pontos e $N \in (2^{\mathbf{X}})^{(\mathbb{Z}^2)}$, então a partir da função $\Sigma : \mathbb{R}^{\mathbf{X}}_N \to \mathbb{R}$ definimos

$$\sum(\mathbf{a}|_{N(y)}) = \sum_{\mathbf{x} \in N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

ou ainda a média de vizinhança por

$$\Gamma(\mathbf{a}|_{N(y)}) = \frac{1}{card(N(\mathbf{y}))} \sum_{\mathbf{x} \in N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

Vizinhanças

Seja agora $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbf{t} \in (\mathbb{F}^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{Y}}$ um *template* unitário em relação a $\circ$ no semianel $(\mathbb{F}, \gamma, \circ)$, $N : \mathbf{Y} \to 2^{\mathbf{Z}}$ uma vizinhança definida por $N(\mathbf{y}) = S(\mathbf{t_y})$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$. Segue então que $\mathbf{b} := \mathbf{a} \textcircled{\gamma} \mathbf{t}$ se define por

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S(\mathbf{t_y})}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t_y}(\mathbf{x})) = \Gamma_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}).$$

Com base nisso, se $\mathbf{X} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^{\mathbf{X}}$, $N : \mathbf{Y} \to 2^{\mathbf{Z}}$ é uma vizinhança (ou seja, $N \in (2^{\mathbf{Z}})^{\mathbf{Y}}$), e $\Gamma : \mathbb{F}^{\mathbf{X}}_{N} \to \mathbb{F}$ é uma função de redução, então definimos o produto de convolução imagem-vizinhança $\mathbf{b} := \mathbf{a} \textcircled{\Gamma} N$ por

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{a}|_{\mathbf{X} \cap N(\mathbf{y})}), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.$$

Vizinhanças

Se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$, $M : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ é a vizinhança de Moore e $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^2)^{(\mathbb{R}^2)}$ é o *template* 3×3 unitário na multiplicação já apresentado, então

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{t} = \mathbf{a} \oplus M$$

Similarmente se $\mathbf{r} \in (\mathbb{Z}^2_{-\infty})^{(\mathbb{Z}^2)}$ é o template de Von Neuman unitário na soma e N é a vizinhança de Von Neumann, então:

$$\mathbf{a} \boxed{\vee} \mathbf{r} = \mathbf{a} \boxed{\vee} N$$

Em geral, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{-\infty}(\mathbf{r_y})$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap S_{-\infty}(\mathbf{r_y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{r_y}(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{y})$$

Vizinhanças

Note que em geral *templates* unitários agem como uma função *característica*, já que eles não atribuem pesos aos *pixels*, mas simplesmente informam quais *pixels* estão no suporte do *template* e quais não.

Além de ser uma alternativa mais simples à operação de *template*, quando cabível, é no tratamento nas bordas de uma imagem. Lá o uso de um *template* $\mathbf{t}$ 3×3 de Moore para a média local seria $\mathbf{b} := \frac{1}{9}(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b})$. No ponto $(1,1)$ teríamos

$$\mathbf{b}(1,1) = \frac{1}{9}(\mathbf{a}(1,1) + \mathbf{a}(1,2) + \mathbf{a}(2,1) + \mathbf{a}(2,2)),$$

que obviamente não é a média correta. O uso de uma função m de média e a operação induzida na vizinhança $\mathbf{a} ⓜ M$ resolveria a questão com elegância.

Vizinhanças

Outra operação interessante é a dilatação entre vizinhanças. Dadas duas funções de vizinhança $N_1, N_2 : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$, a dilatação de N_1 por N_2, denotada $N_1 \oplus N_2$ é dada por

$$N(\mathbf{y}) = \bigcup_{\mathbf{p} \in N_2(\mathbf{y})} (N_1(\mathbf{y}) + (\mathbf{p} - \mathbf{y})),$$

em que $N(\mathbf{y}) + \mathbf{q} \equiv \{\mathbf{x} + \mathbf{q} : \mathbf{x} \in N(\mathbf{y})\}$.

Por exemplo, seja N_1 a vizinhança de Moore e N_2 a de Von Neumann, ambas em $\mathbb{Z}^2$ em torno de $(0,0)$. Vamos dividir em partes, começando por $(-1,-1) \in N_1(\mathbf{y})$:

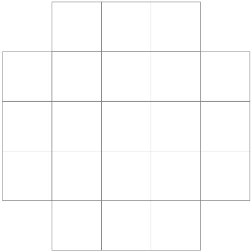
$$N(0,0)_{(-1,-1)} = \{(-1,-1) + (-1,0) - (0,0), (-1,-1) + (0,-1) - (0,0), (-1,-1) + (0,1) - (0,0), (-1,-1) + (1,0) - (0,0)\} = \{(-2,-1), (-1,-2), (-1,0), (0,-1)\}$$

Vizinhanças

Vamos ilustrar também para $(1,0) \in N_1(\mathbf{y})$:

$$N(0,0)_{(1,0)} = \{(1,0)+(-1,0)-(0,0),(1,0)+(0,-1)-(0,0),\\ (1,0)+(0,1)-(0,0),(1,0)+(1,0)-(0,0)\} =\\ \{(0,0),(1,-1),(1,1),(2,0)\}$$

A figura abaixo mostra a vizinhança resultante:



Vizinhanças

Para $k \in \mathbb{N}$ definimos também a k-ésima iteração da vizinhança $N : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ indutivamente por

$$N^k = N^{k-1} \oplus N$$

dado que $N_0(\mathbf{y}) = \{\mathbf{y}\}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Uma função de vizinhança $N : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ é *invariante a translação* se $N(\mathbf{y} + \mathbf{p}) = N(\mathbf{y}) + \mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

Se a vizinhança N é invariante a translação, então definimos a *reflexão* ou *conjugado* N^* por

$$N^*(\mathbf{y}) = N^*(\mathbf{0}) + \mathbf{y},$$

em que $N^*(\mathbf{0}) = \{-\mathbf{x} : \mathbf{x} \in N(\mathbf{0})\}$, sendo $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Vizinhanças

Por exemplo, para a vizinhança não-simétrica abaixo temos o conjugado na figura:

-1,-1	-1,0		
0,-1	0,0	0,1	0,2
	1,0		1,2

-1,-2		-1,0	
	0,-1	0,0	0,1
		1,0	1,1
		0,-2	

Vizinhanças

Podemos finalmente resumir as operações de vizinhança:
Vizinhança reduzida genérica:

$$\mathbf{a} \bigcirc\!\!\!\!\!\Gamma\, N = \{(\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{a}|_{N(\mathbf{y})}), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

Soma de vizinhança:

$$\mathbf{a} \oplus N = \{(\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

Máximo de vizinhança:

$$\mathbf{a} \boxed{\vee} N = \{(\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

Mínimo de vizinhança:

$$\mathbf{a} \boxed{\wedge} N = \{(\mathbf{y}, \mathbf{b}(\mathbf{y})) : \mathbf{b}(\mathbf{y}) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \cap N(\mathbf{y})} \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$$

Vizinhanças

Vale notar que neste caso o máximo e mínimo simples e suas versões morfológicas coincidem, isto é: $\mathbf{a} \bigcirc\!\!\!\!\vee\, N = \mathbf{a} \boxed{\vee} N$ e $\mathbf{a} \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, N = \mathbf{a} \boxed{\wedge} N$