Teoria de Conjuntos Fuzzy e Algumas Aplicações em Biomatemática

Estevão Esmi Laureano

(eelaureano@ime.unicamp.br)

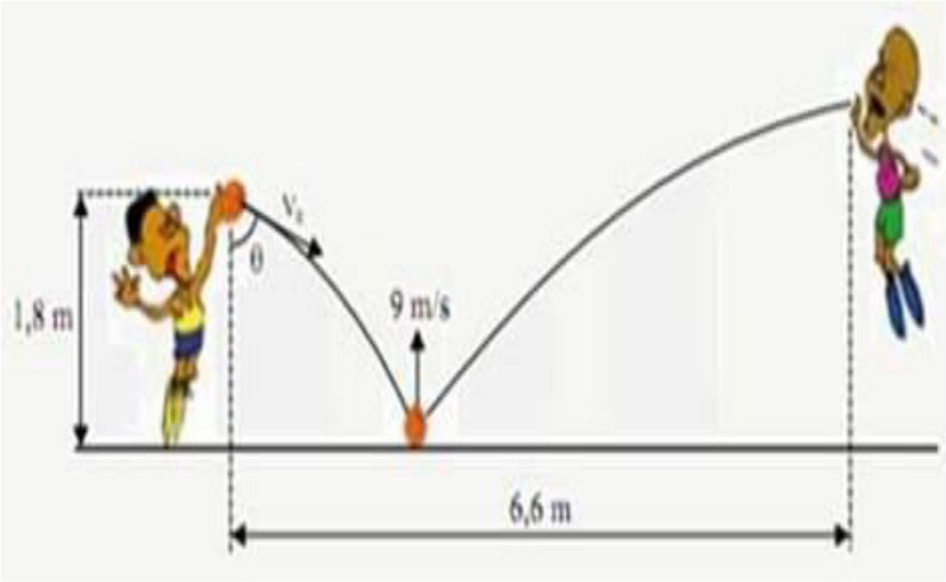
www.ime.unicamp.br

IMECC - Unicamp

Como a matemática pode me ajudar?

Matemática é uma linguagem para descrever objetos e fenômenos

- Cálculo diferencial e integral
- Geometria
- Probabilidade
- Teoria de Conjuntos Fuzzy



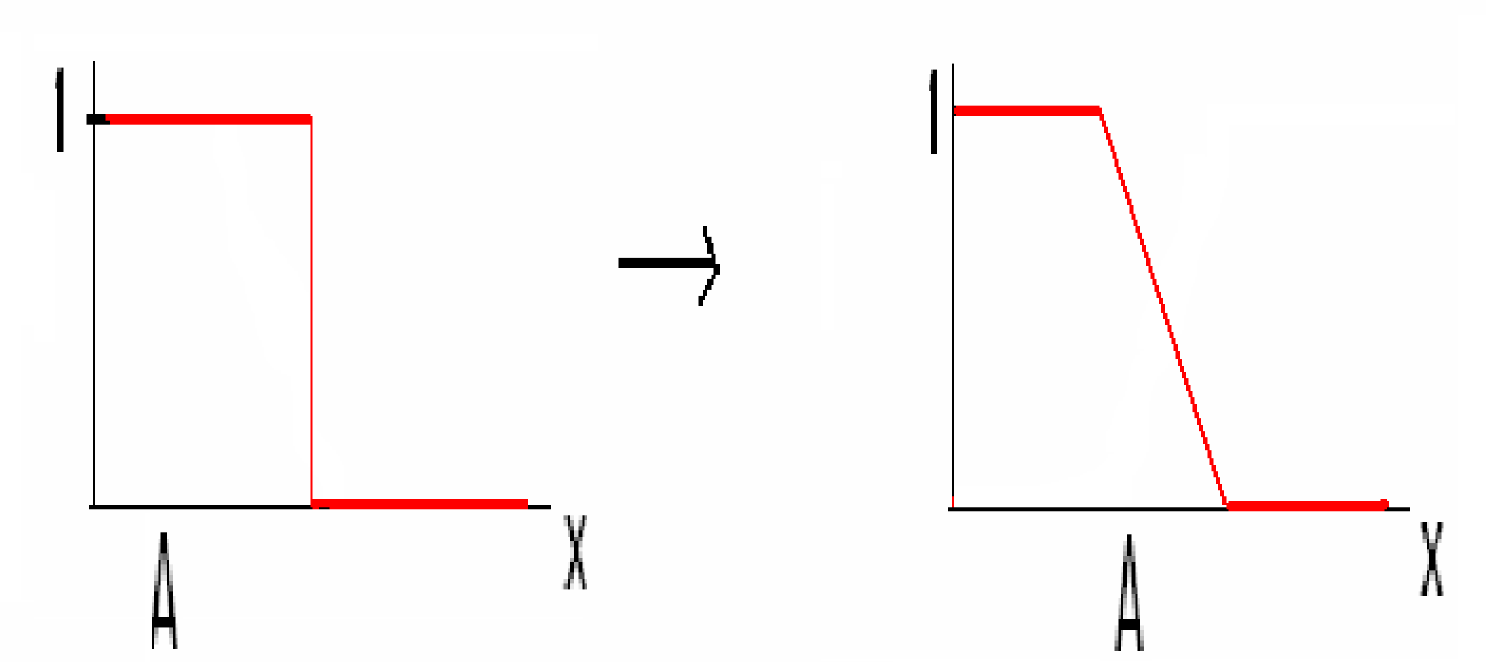
Fonte: http://fisicaevestibular.com.br/

Lógica Fuzzy: O Começo

- Lofti Zadeh publica em 1965 o artigo com as primeiras idéias sobre conjuntos fuzzy.

- Principal interesse: armazenar conceitos como “aproximadamente”, “em torno de”, etc.

Conj. Clássico e Conj. Fuzzy



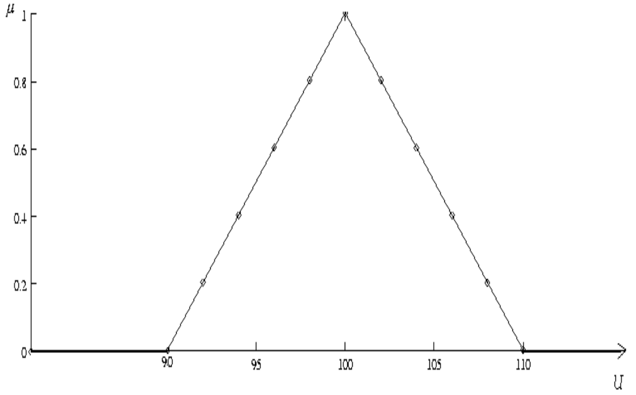
Função de Pertinência

Um subconjunto fuzzy ***F*** de ***U*** é definido por uma função μ: U $\rightarrow$ [0,1], chamada *<u>função de pertinência</u>* de *F*.

μ (x) indica o grau com que "x" é um elemento de *F*.

Ex.: "em torno de 100"

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-90}{10} & se \quad 90 \leq x < 100 \\ \dfrac{110-x}{10} & se \quad 100 \leq x \leq 110 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$



Lógica Fuzzy

min(a,b)

a	b	a “e” b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	min(a,b)
0,1	0.2	0,1
0,2	0,9	0,2
0,85	0.95	0,85
0,7	0.8	0,7

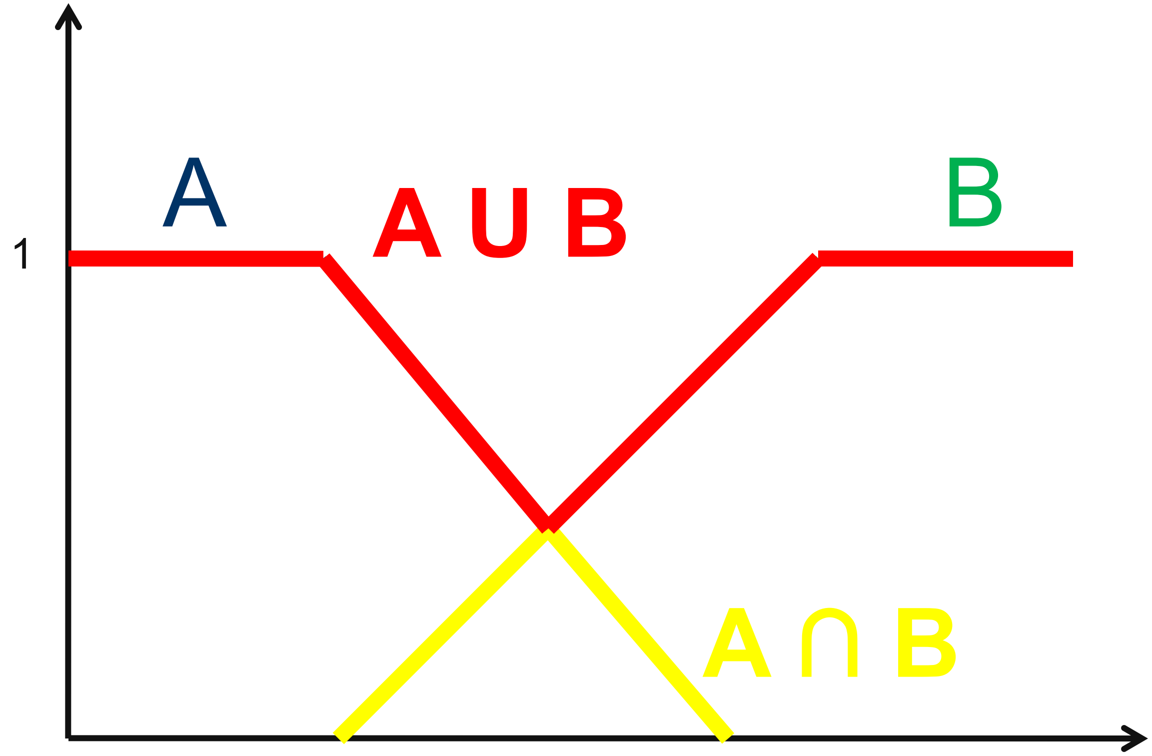
Lógica Fuzzy

max(a,b)

a	b	a “ou” b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	max(a,b)
0,1	0.2	0,2
0,2	0,9	0,9
0,85	0.95	0,95
0,7	0.8	0,8

Operações entre conj. fuzzy



Lógica fuzzy-(raciocínio aproximado)

Modus Ponens

regra: $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$
fato: **a**

conclusão: **b**

Modus Ponens Generalizado

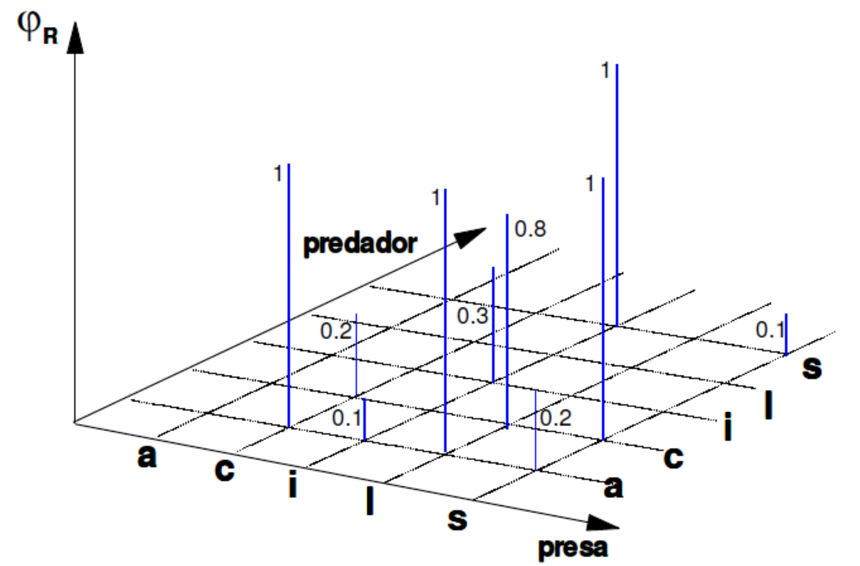
regra: $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$
fato: **a***

conclusão: **b***

Composição Relacional

Relação Fuzzy

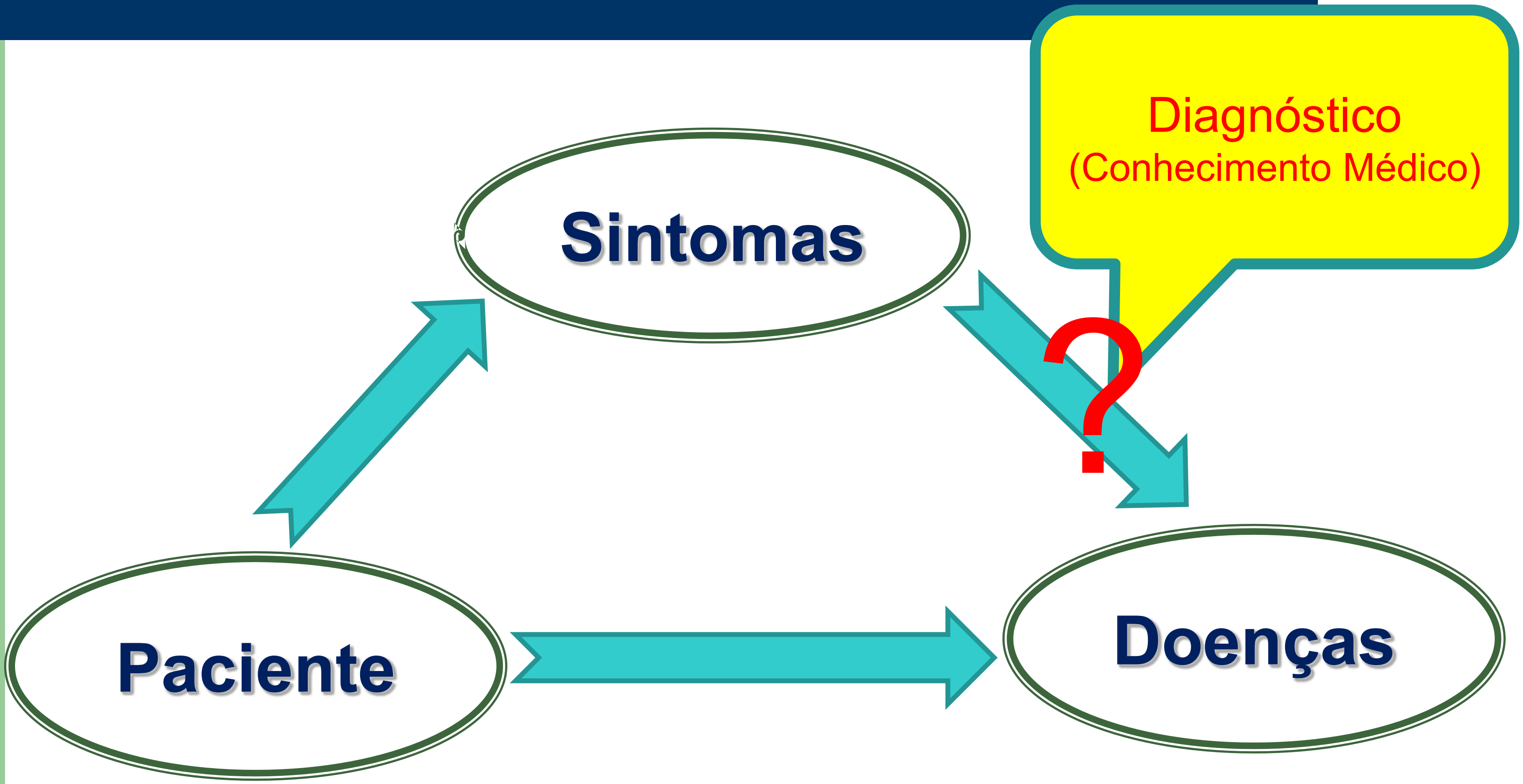
$$
\mathcal{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ c \\ i \\ l \\ s \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & c & i & l & s \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\
0,1 & 0 & 0,3 & 0 & 1 \\
1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\
0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,1
\end{array}\right]
\end{array}
$$



- a – Águias
- c – Cobras
- i – Insetos

- l – Lebres
- s – Sapos

Aplicação: Diagnóstico Médico



Doenças Infantis

Pacientes

P_1 = paciente 1	P_2 = paciente 2	P_3 = paciente 3	P_4 = paciente 4

Sintomas

s_1 = febre	s_2 = cefaléia	s_3 = garganta inflamada	s_4 = exantema
s_5 = gânglio	s_6 = coriza	s_7 = conjuntivite	s_8 = língua de morango
s_9 = fotofobia	s_{10} = tosse seca	s_{11} = vômito	

Doenças

d_1 = escarlatina	d_2 = rubéola	d_3 = sarampo	d_4 = gripe

Relação S: Pacientes X Sintomas

$$
S = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 & s_{10} & s_{11} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\
0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\
0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}6 \\
0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(corner label: P/s)

Relação T: Pacientes X Diagnósticos

$$
T = \begin{array}{c} \text{P/d} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,9 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,9 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Relação D: Sintomas X Diagnósticos

$S \circ \mathbf{D} = T$

Composição Relacional

$S^{-1} \Rightarrow T = \mathbf{D} =$

Operação Inversa

$$
\begin{array}{c}
 \\
s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \\ s_{11}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} d1 & d2 & d3 & d4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc}
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\
0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\
0{,}3 & 1{,}0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\
0{,}4 & 0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}3 \\
1{,}0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\
0{,}4 & 0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}3 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1{,}0 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

(The row/column corner label printed above the row labels is "s/d".)

Novos Diagnósticos:

Paciente pertence ao conjunto dos infectados com escarlatina com grau 0.9

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1{,}0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}4 & 1{,}0 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1{,}0 & 0{,}1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Diagnóstico } D^{T}.} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}8 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}9 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}}_{\text{Vetor de Sintomas do Paciente}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor de Doenças do Paciente}}$$

Base de regras fuzzy

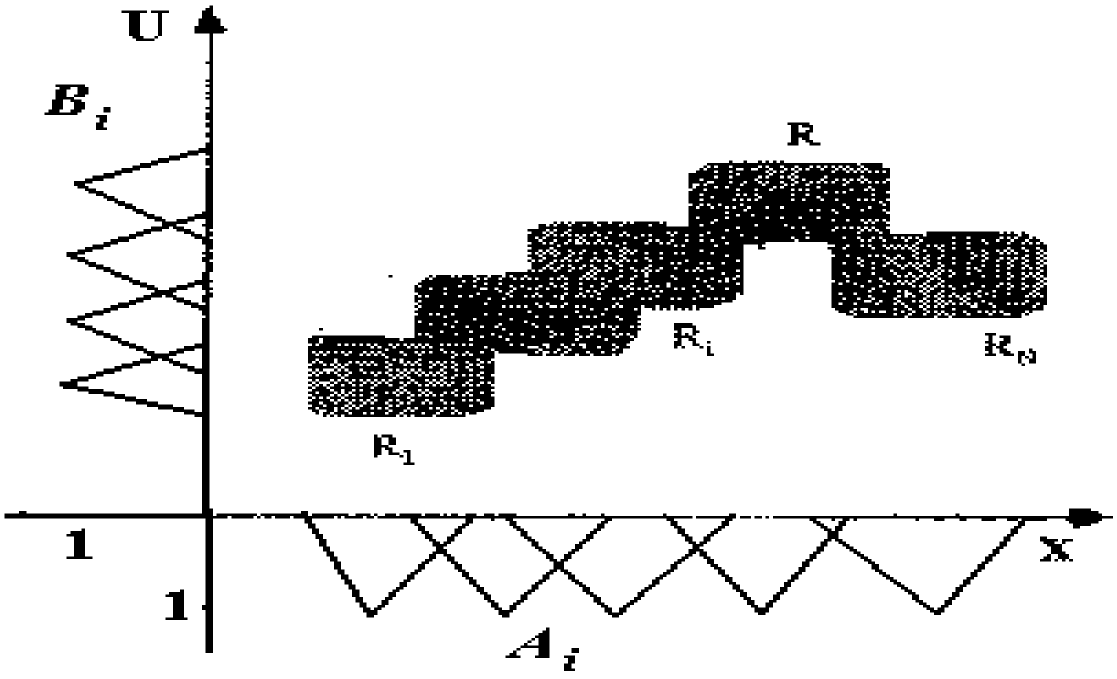
Variáveis Linguísticas

Conjuntos Fuzzy

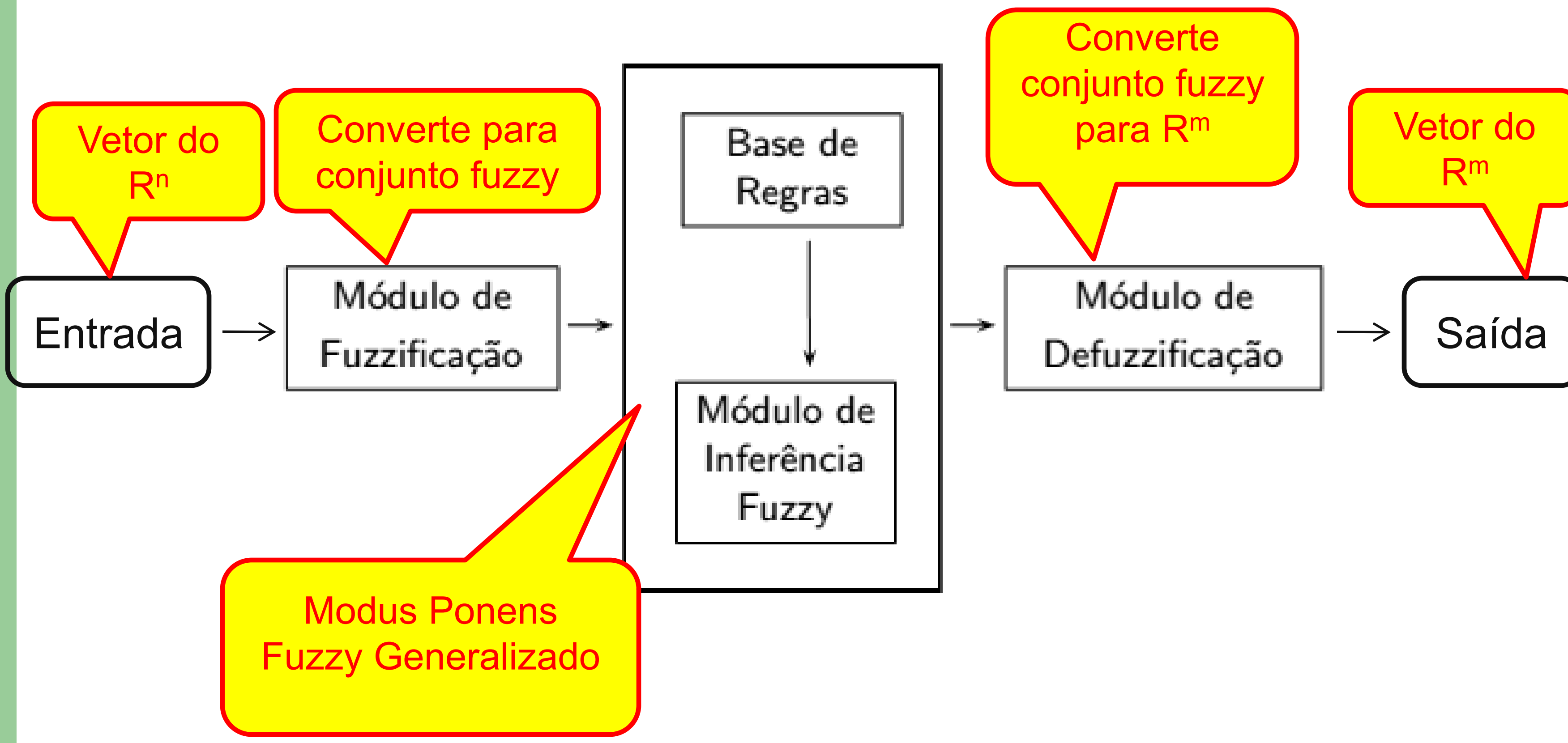
- R_1: **Se** $\underline{x_1 \text{ é } A_{11}}$ e $\underline{x_2 \text{ é } A_{12}}$ e ... e $\underline{x_n \text{ é } A_{1n}}$ **então** $\underline{u \text{ é } B_1}$.
- R_2: **Se** $\underline{x_1 \text{ é } A_{21}}$ e $\underline{x_2 \text{ é } A_{22}}$ e ... e $\underline{x_n \text{ é } A_{2n}}$ **então** $\underline{u \text{ é } B_2}$.
- R_m: **Se** $\underline{x_1 \text{ é } A_{m1}}$ e $\underline{x_2 \text{ é } A_{m2}}$ e...e $\underline{x_n \text{ é } A_{mn}}$ **então** $\underline{u \text{ é } B_m}$.

Se a <u>Banana é Amarela</u> Então a <u>Banana é Madura</u>.

Gráfico Regras



Sistemas de Base de Regras Fuzzy (SBRF)



Aplicação: Classificação de Risco

Variável Linguística

- **Dismenorréia :** dor pélvica durante períodos menstruais.
- **Dispareunia:** dor durante o ato sexual.
- **Dores nas costas e/ou pernas.**
- **Cansaço.**
- **Risco de endometriose**

SBRF compostas por 81 regras do tipo:

"Se	Dismenorréia	é	moderada	Então	risco de endometriose	é	Improvável"
	Dispareunia	é	leve				
	Dores nas costas e/ou pernas	é	leve				
	Cansaço	é	leve				

Aplicação: Classificação de Risco

Site: http://endometriose.pythonanywhere.com/

Entradas (0-10)

Dismenorreia: 7

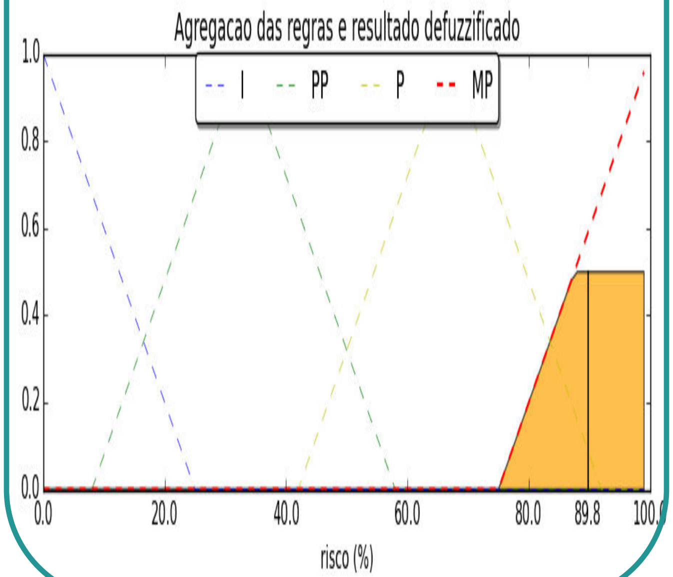
Dispareunia: 4

Dor nas costas/pernas: 7

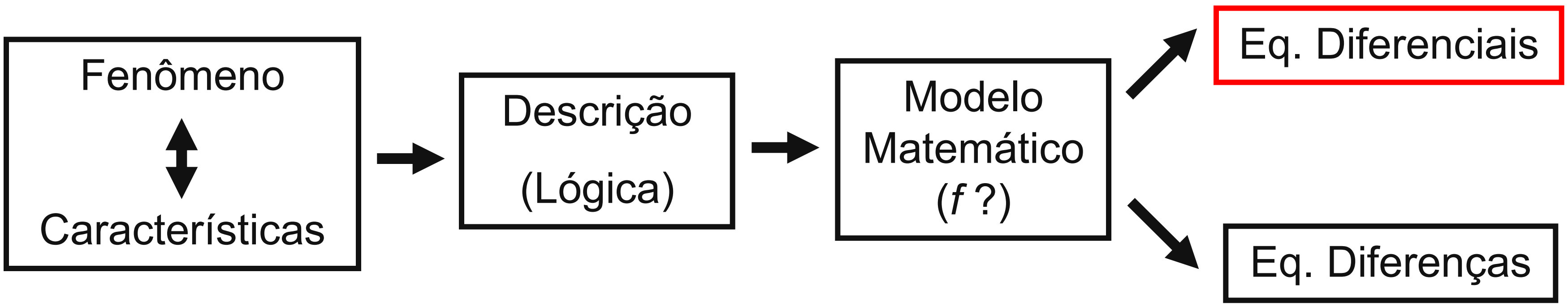
Cansaco: 9

Enviar

Saída: 89.8%



Sistemas Dinâmicos



Problemas de Valor Inicial (PVI)

A definição de f requer um
processo de modelagem
que geralmente é não tri

PVI de 1° o

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

IDEIA

p-Fuzzy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = SBRF(x,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

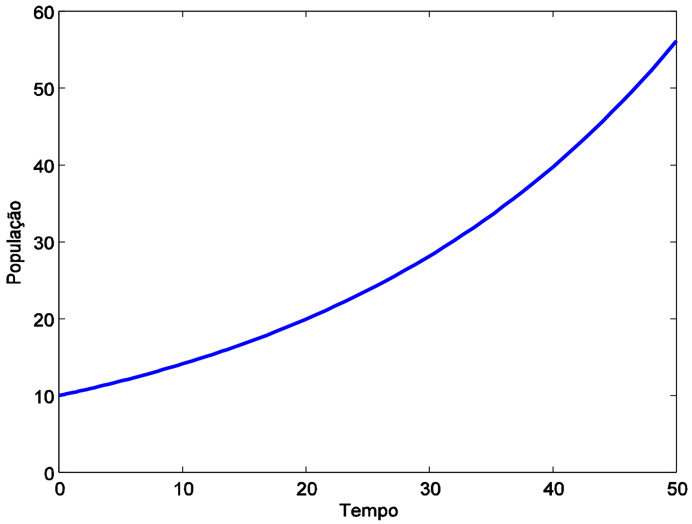
Princípio bem aceito Ecologia

"Uma população varia a uma taxa proporcional própria população em cada instante t"

Modelo de Malthus

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Sol.: $x(t) = x_0 e^{at}$

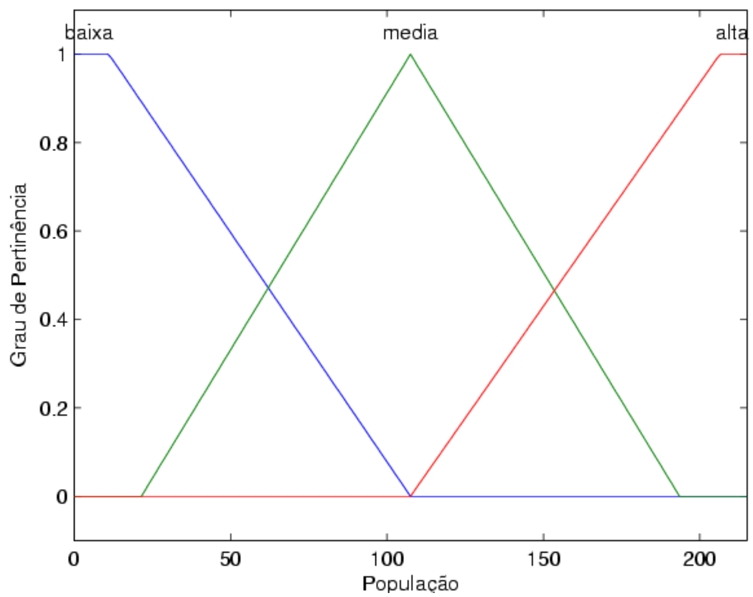


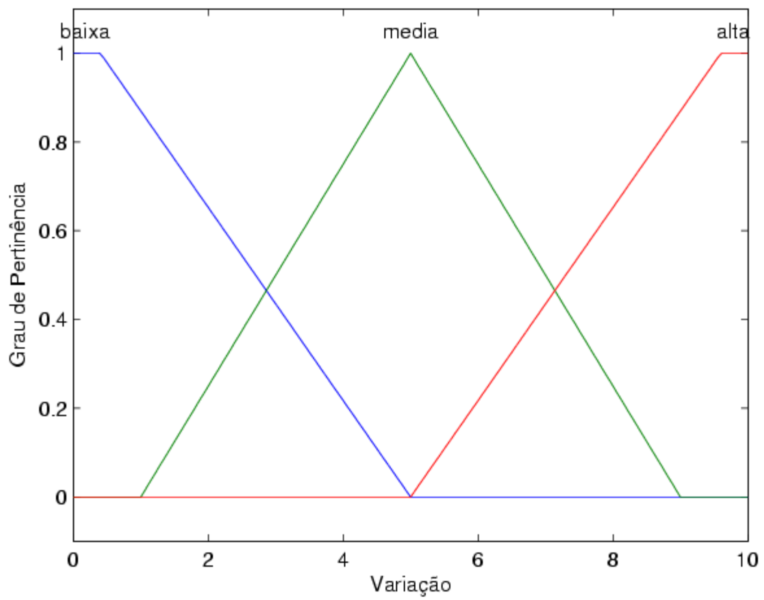
Aplicação 2: Malthus com regras

- Uma primeira tentativa de modelagem para tal princípio poderia nos levar às seguintes regras

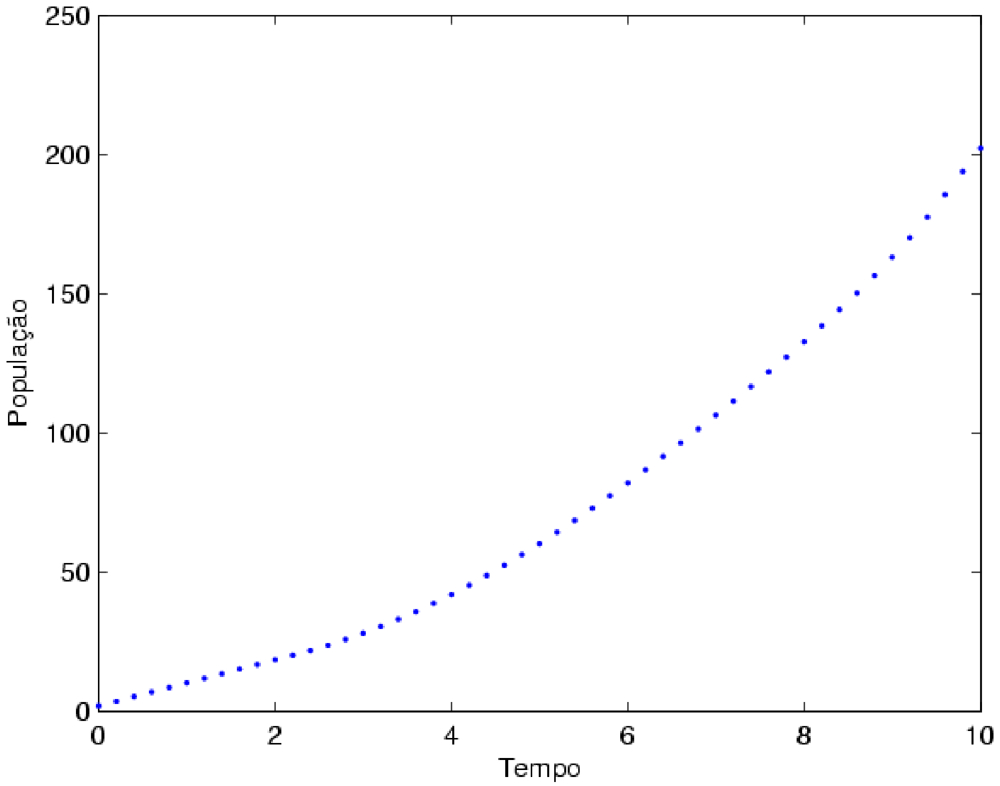
- Se a população(X) é baixa(B) então a variação é baixa(B);
- Se a população(X) é média(M) então a variação é média(M);
- Se a população(X) é alta(A) então a variação é alta(A).

Conjuntos fuzzy para os antecedentes e conseqüentes das regras de Malthus





Solução p-fuzzy



Modelo Clássico do tipo Presa-Predador de Lotka-Volterra

Modelo Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx + \beta xy \end{cases}$$

Taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores

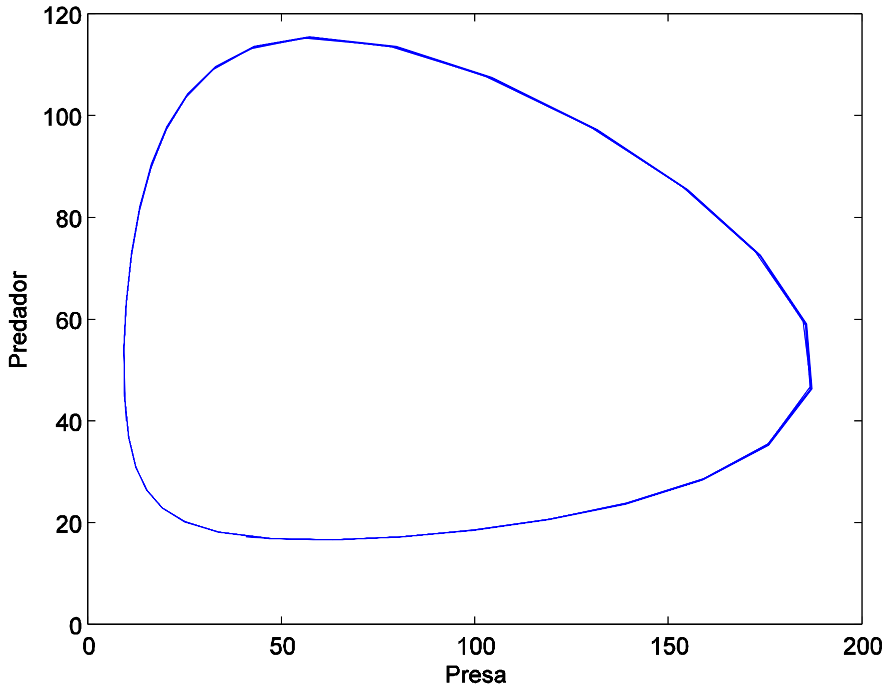
Representa a proporção de sucesso dos ataques dos predadores

Taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas

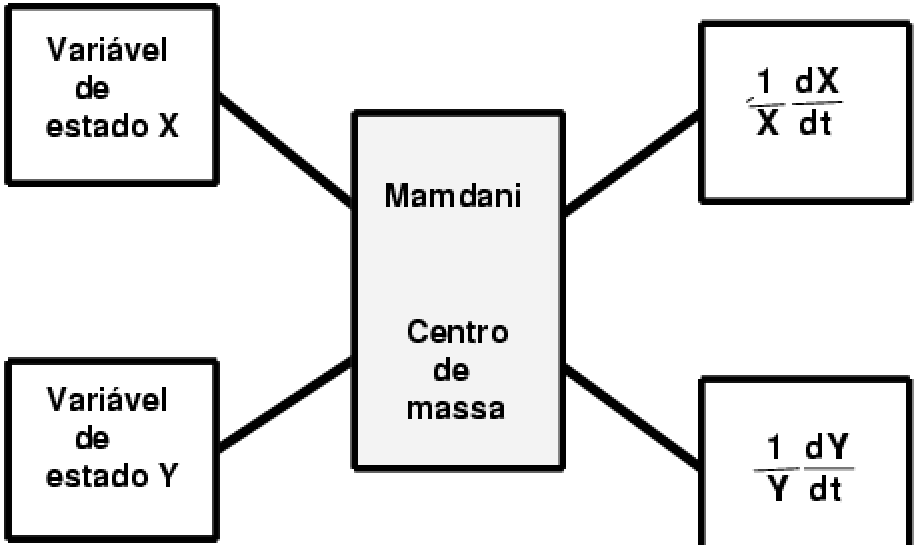
Taxa de conversão de biomassa das presas em predadores

Plano de fase do modelo clássico de Lotka-Volterra

- Ciclos Ecológicos



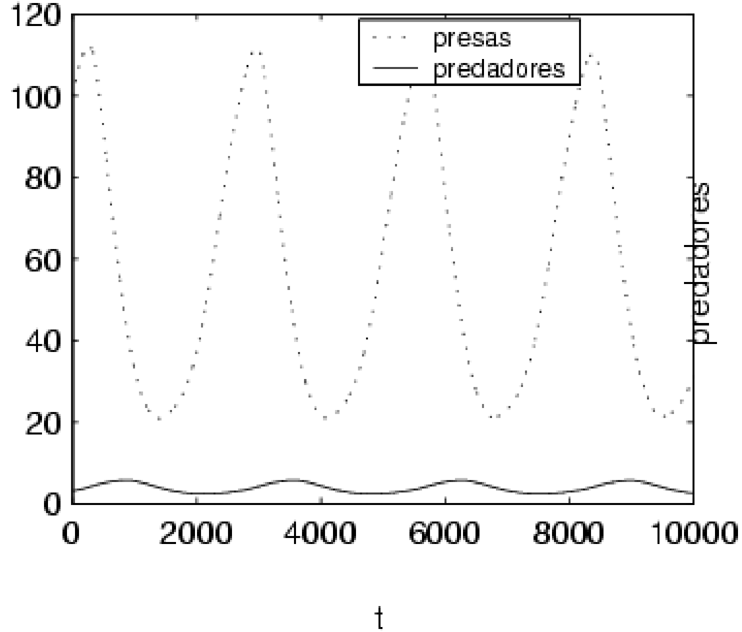
Arquitetura para modelo p-fuzzy de Lotka-Volterra



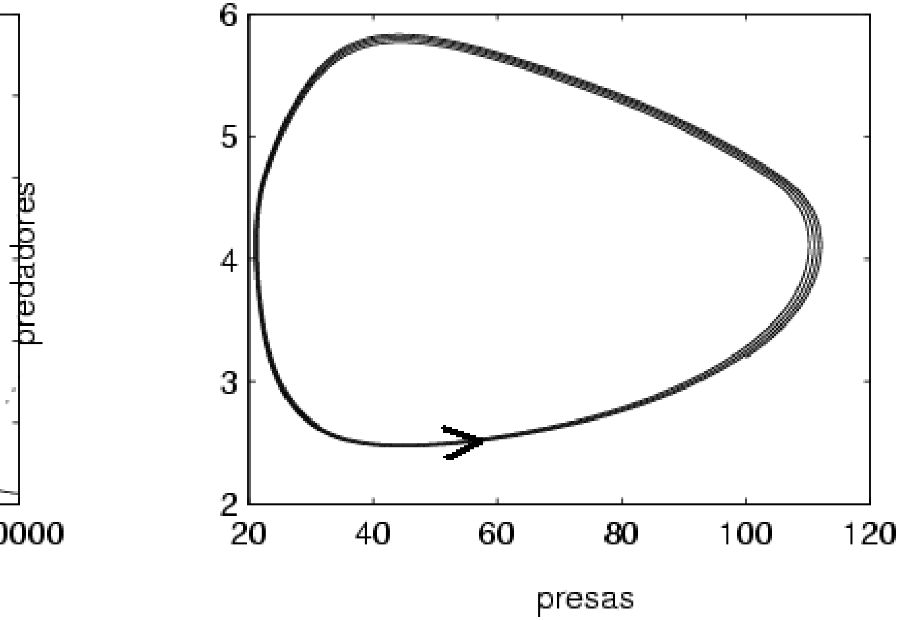
Base de Regras para Lotka-Volterra

- Se X é A1 e Y é B1 então (1/X)((dX)/(dt)) é P2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N2
- Se X é A2 e Y é B1 então (1/X)((dX)/(dt)) é P2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N1
- Se X é A3 e Y é B1 então (1/X)((dX)/(dt)) é P2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P1
- Se X é A4 e Y é B1 então (1/X)((dX)/(dt)) é P2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P2
- Se X é A1 e Y é B2 então (1/X)((dX)/(dt)) é P1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N2
- Se X é A2 e Y é B2 então (1/X)((dX)/(dt)) é P1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N1
- Se X é A3 e Y é B2 então (1/X)((dX)/(dt)) é P1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P1
- Se X é A4 e Y é B2 então (1/X)((dX)/(dt)) é P1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P2
- Se X é A1 e Y é B3 então (1/X)((dX)/(dt)) é N1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N2
- Se X é A2 e Y é B3 então (1/X)((dX)/(dt)) é N1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N1
- Se X é A3 e Y é B3 então (1/X)((dX)/(dt)) é N1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P1
- Se X é A4 e Y é B3 então (1/X)((dX)/(dt)) é N1 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P2
- Se X é A1 e Y é B4 então (1/X)((dX)/(dt)) é N2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N2
- Se X é A2 e Y é B4 então (1/X)((dX)/(dt)) é N2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é N1
- Se X é A3 e Y é B4 então (1/X)((dX)/(dt)) é N2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P1
- Se X é A4 e Y é B4 então (1/X)((dX)/(dt)) é N2 e (1/Y)((dY)/(dt)) é P2

Contingentes populacionais e plano de fase para p-fuzzy Lotka-Volterra

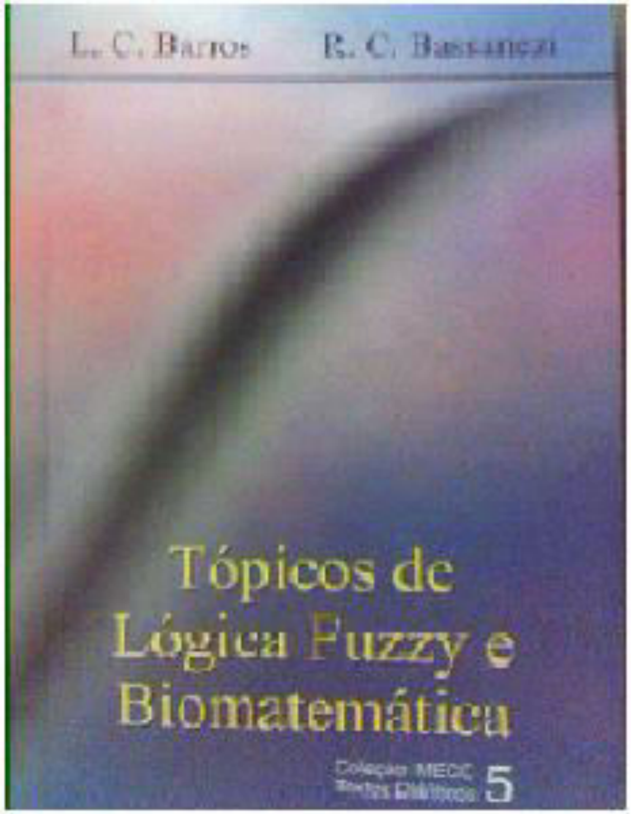


(a)



(b)

Onde acho mais informações sobre fuzzy e suas aplicações?



Este é o fim!?

Muito obrigado!