Tópico 5 - Sistemas Não-Lineares

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Introdução

Sistemas não-lineares

Dada uma função vetorial $F : \Re^n \rightarrow \Re^n, F = (f_1, \dots, f_n)^T$, resolver o sistema não linear F é encontrar o vetor x tal que

$$F(x) = 0$$

ou equivalentemente:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Os sistemas lineares são um caso particular em que $F(x) = Ax - b, A \in \Re^{n \times n}$

Introdução

EXEMPLO:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

Introdução

Vamos partir do pressuposto de que $F(x)$ é bem definida, possui derivadas contínuas e existe uma solução x^* tal que $F(x^*) = 0$

Definimos então o **vetor gradiente** de f_i:

$$\nabla f_i(x) = \left[\frac{\partial f_i(x_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x_2)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i(x_n)}{\partial x_n}\right]^T$$

e a matriz de derivadas parciais, chamada **matriz Jacobiana**:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Introdução

No sistema anterior:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

Outline

Método de Newton

- Generalização do método de Newton para zeros de funções de uma variável
- Relembrando que no método de Newton que já vimos a função $f(x)$ era aproximada na vizinhança de um valor aproximado x_k por um modelo linear local dado por $L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$
- Uma analogia para sistemas de funções de várias variáveis nos leva ao seguinte modelo:

$$f_i(x) \approx f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}), i = 1, 2, \ldots, n$$

  e para o sistema total:

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

- A nova aproximação será o zero do modelo linear local e portanto solução de

$$J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$$

Método de Newton

Chamando $x - x^{(k)}$ de $s^{(k)}$ temos a seguinte iteração

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

em que $s^{(k)}$ é a solução do sistema

$$J(x^{(k)})s = -F(x^{(k)})$$

- Tanto métodos diretos quanto iterativos podem ser usados para resolver o sistema. No caso de métodos iterativos temos o **método de Newton inexato**.

Método de Newton: Exemplo 1

Resolver sistema inicial com $x^{(0)} = [1 \quad 1]^T$.

Após calculados $J(x^{(0)})$ e $-F(x^{(0)})$ teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Pivoteando e triangularizando:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$s^{(0)} = [6 \quad -0.5]^T \Rightarrow x^{(1)} = [7 \quad 0.5]^T$$

Método de Newton: Exemplo 1

Agora calculamos $J(x^{(1)})$ e $-F(x^{(1)})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -36.25 \end{bmatrix}$$

Pivoteando e triangularizando:

$$\begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36.25 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 0 & 1.9286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36.25 \\ 2.5893 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$s^{(1)} = [-2.6852 \quad 1.3426]^T \Rightarrow x^{(2)} = [4.3148 \quad 1.8426]^T$$

Continuando as etapas teremos:

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= [2.9869 \qquad 2.5066] \\ x^{(3)} &= [2.3511 \qquad 2.8244] \\ x^{(4)} &= [2.0821 \qquad 2.9590] \\ x^{(5)} &= [2.0070 \qquad 2.9965] \end{aligned}$$

.

Método de Newton: Exemplo 2

$$\begin{cases} f_1 = \sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0 \\ f_2 = \left(\frac{4\pi-1}{4\pi}\right)\left(e^{2x_1} - e\right) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} 4\pi x_2 \cos(4\pi x_1 x_2) - 1 & 4\pi x_1 \cos(4\pi x_1 x_2) - 2 \\ \left(\frac{4\pi-1}{2\pi}\right) e^{2x_1} - 2e & 8ex_2 \end{bmatrix}$$

Calculando $J(x^{(0)})$ e $-F(x^{(0)})$, devemos resolver:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \left(\frac{4\pi-1}{2\pi}\right) - 2e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{4\pi-1}{4\pi}\right)(1-e) \end{bmatrix}$$

Deste modo:

$$s^{(0)} = [-0.4398 \quad 0.2199]^T \Rightarrow x^{(1)} = [-0.4398 \quad 0.2199]^T$$

Método de Newton: Exemplo 2

Calculando agora $J(x^{(1)})$ e $-F(x^{(1)})$:

$$\begin{bmatrix} -0.0388 & -3.9225 \\ -4.6728 & 4.7824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9376 \\ -0.7970 \end{bmatrix}$$

Por eliminação, com pivoteamento:

$$\begin{bmatrix} -4.6728 & 4.7824 \\ 0 & -3.9622 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7970 \\ 0.9442 \end{bmatrix}$$

Deste modo:

$$s^{(1)} = [-0.0733 \quad -0.2383]^T \Rightarrow x^{(2)} = [-0.5131 \quad -0.0184]^T$$

Outline

Método de Newton Modificado

MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

Nesta abordagem, a Jacobiana é calculada apenas para a aproximação inicial $x^{(0)}$, de modo que a iteração fica sendo:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

em que $s^{(k)}$ é a solução do sistema

$$J(x^{(0)})s = -F(x^{(k)})$$

Método de Newton Modificado - Exemplo

No sistema inicial o cálculo de $x^{(1)}$ é idêntico mas no cálculo de $x^{(2)}$ vamos usar $J(x^{(0)})$ e $-F(x^{(1)})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -36.25 \end{bmatrix}$$

Pivoteando e triangularizando:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36.25 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36.25 \\ 18.125 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$s^{(1)} = [-36.25 \quad 18.125]^T \Rightarrow x^{(2)} = [-29.25 \quad 18.625]^T$$

Outline

Métodos Quase-Newton

- Ideia é obter uma sequência convergente sem precisar avaliar a Jacobiana a cada etapa. O método de Newton modificado é um exemplo desta abordagem, porém com convergência apenas linear, enquanto Newton original é quadrática
- A expressão geral para a iteração é:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

em que $s^{(k)}$ é a solução de

$$B^{(k)}s^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

Métodos Quase-Newton

Se temos $x^{(k)}$, $F(x^{(k)})$, $x^{(k+1)}$ e $F(x^{(k+1)})$, o seguinte modelo linear aproxima $F(x)$ em torno de $x^{(k+1)}$:

$$L_{k+1}(x) = F(x^{(k+1)}) + B^{(k+1)}(x - x^{(k+1)})$$

para qualquer $B^{(k+1)}$ satisfazendo:

$$B^{(k+1)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$$

já que neste caso teremos $L_{k+1}(x^{(k+1)}) = F(x^{(k+1)})$

Métodos Quase-Newton

Impondo que o modelo L_{k+1} seja válido também em $x^{(k)}$:

$$L_{k+1}(x^{(k)}) = F(x^{(k)})$$

e portanto:

$$L_{k+1}(x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) + B^{(k+1)}(x^{(k)} - x^{(k+1)}) = F(x^{(k)})$$

o que leva a:

$$B^{(k+1)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$$

Definindo $s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ e $y^{(k)} = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$ temos a versão compacta:

$$B^{(k+1)}s^{(k)} = y^{(k)}$$

conhecida como **equação secante**.

Métodos Quase-Newton

Note a semelhança com o método da secante visto para zeros de funções. Lá tínhamos a reta passando por $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$:

$$r(x) = f(x_{k+1}) + b(x - x_{k+1})$$

e com as restrições $r(x_k) = f(x_k)$ e $r(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$ obtemos

$$b = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \Rightarrow bs_k = y_k$$

com b satisfazendo a equação secante.

No caso $n > 1$ a matriz $B^{(k+1)}$ tem n^2 variáveis e não será mais única.

Métodos quase-Newton diferem pelas imposições sobre $B^{(k+1)}$, como variação mínima em relação $B^{(k)}$, preservar simetria ou esparsidade da Jacobiana, etc.

Métodos Quase-Newton

Exemplo de $B^{(k+1)}$ é a de Broyden:

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} + u^{(k)}(s^{(k)})^T$$

em que

$$u^{(k)} = \frac{(y^{(k)} - B^{(k)}s^{(k)})}{(s^{(k)})^T s^{(k)}} = \frac{F(x^{(k+1)})}{(s^{(k)})^T s^{(k)}}.$$

Métodos Quase-Newton - Exemplo

No sistema anterior, vamos considerar $B^{(0)} = J(x^{(0)})$:

$$B^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $u^{(0)}$:

$$u^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 36.25 \end{bmatrix} /36.25 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $B^{(1)}$ se obtém de:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [6 \quad -0.5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Seguindo com $B^{(1)} s^{(1)} = -F(x^{(1)})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -36.25 \end{bmatrix}$$

que leva a $s^{(1)} = [-5 \quad 2.5]$ e assim $x^{(2)} = [2 \quad 3]$ (Solução exata!).

Fórmula de Sherman-Morrison

O método de Broyden possui convergência super-linear, mais lenta que Newton original.

Continuamos resolvendo um sistema linear com complexidade $\mathcal{O}(n^3)$ em cada iteração (matriz B é sempre atualizada).

Fórmula de Broyden pode ser reescrita como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (B^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}).$$

Usamos então a fórmula de Sherman-Morrison para inversão de matrizes.

Fórmula de Sherman-Morrison

Fórmula de Sherman-Morrison

Se A é uma matriz não-singular e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores tais que $\mathbf{y}^T A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$, então a matriz $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ é não-singular e

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^T A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^T A^{-1}\mathbf{x}}.$$

Esta fórmula permite que $(B^{(k+1)})^{-1}$ seja obtida a partir de $(B^{(k)})^{-1}$, eliminando a necessidade de se resolver um sistema linear em cada iteração.

Fórmula de Sherman-Morrison

Faremos as seguintes substituições na fórmula de Sherman-Morrison:

$$A \leftrightarrow B^{(k)}$$

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \frac{\mathbf{y}^{(k)} - B^{(k)}\mathbf{s}^{(k)}}{(\mathbf{s}^{(k)})^T\mathbf{s}^{(k)}}$$

$$\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{s}^{(k)}$$

Aplicando a fórmula teremos:

$$(B^{(k+1)})^{-1} = \left(B^{(k)} + \frac{\mathbf{y}^{(k)} - B^{(k)}\mathbf{s}^{(k)}}{(\mathbf{s}^{(k)})^T\mathbf{s}^{(k)}}(\mathbf{s}^{(k)})^T\right)^{-1}$$

$$= (B^{(k)})^{-1} - \frac{(B^{(k)})^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}^{(k)} - B^{(k)}s^{(k)}}{(\mathbf{s}^{(k)})^T\mathbf{s}^{(k)}}(\mathbf{s}^{(k)})^T\right)(B^{(k)})^{-1}}{1 + (s^{(k)})^T(B^{(k)})^{-1}\left(\frac{y^{(k)} - B^{(k)}s^{(k)}}{(s^{(k)})^Ts^{(k)}}\right)}$$

Fórmula de Sherman-Morrison

$$= (B^{(k)})^{-1} - \frac{\left((B^{(k)})^{-1}y^{(k)} - s^{(k)}\right)(s^{(k)})^T (B^{(k)})^{-1}}{(\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{s}^{(k)} + (s^{(k)})^T (B^{(k)})^{-1} y^{(k)} - (\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{s}^{(k)}}$$

e finalmente:

$$(B^{(k+1)})^{-1} = (B^{(k)})^{-1} + \frac{\left(s^{(k)} - (B^{(k)})^{-1}y^{(k)}\right)(s^{(k)})^T (B^{(k)})^{-1}}{(s^{(k)})^T (B^{(k)})^{-1} y^{(k)}}$$

Fórmula de Sherman-Morrison

No exemplo anterior:

$$(B^{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo para $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - (B^{(0)})^{-1} F(x^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Sherman-Morrison

Na 2ª etapa, aplicando Sherman-Morrison:

$$(B^{(1)})^{-1} = (B^{(0)})^{-1} + \frac{\left(s^{(0)} - (B^{(0)})^{-1}y^{(0)}\right)(s^{(0)})^T(B^{(0)})^{-1}}{(s^{(0)})^T(B^{(0)})^{-1}y^{(0)}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 47.25 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 6 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 47.25 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} 6 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 42.25 \\ -18.625 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 6 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42.25 \\ -18.625 \end{bmatrix}}$$

Fórmula de Sherman-Morrison

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} -36.25 \\ 18.125 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 6 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}}{262.8125}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} -36.25 \\ 18.125 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} -6.5 & 6.25 \end{bmatrix}}{262.8125}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 235.625 & -226.5625 \\ -117.8125 & 113.2813 \end{bmatrix}}{262.8125}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8966 & -0.8621 \\ -0.4483 & 0.4310 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1034 & 0.1379 \\ 0.5517 & -0.0690 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Sherman-Morrison

Resolvendo para $x^{(2)}$:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - (B^{(1)})^{-1} F(x^{(1)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.1034 & 0.1379 \\ 0.5517 & -0.0690 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 36.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Sherman-Morrison - EXEMPLO

Resolver o sistema seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ \mathrm{e}^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{array} \right.$$

Usar a aproximação inicial

$$x^{(0)} = [0.1, 0.1, -0.1]^T$$

Jacobiana:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 \mathrm{e}^{-x_1 x_2} & -x_1 \mathrm{e}^{-x_1} & 20 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Sherman-Morrison - EXEMPLO

Já para F temos

$$F = \begin{bmatrix} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 \\ \mathrm{e}^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

Substituindo para $x^{(0)}$:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1.199950 \\ -2.269833 \\ 8.462025 \end{bmatrix}$$

Por sua vez, para a matriz B teremos:

$$B^{(0)} = J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 & 9.99983 \times 10^{-4} & -9.999833 \times 10^{-4} \\ 0.2 & -32.4 & 0.9950042 \\ -9.900948 \times 10^{-2} & -9.900498 \times 10^{-2} & 20 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Sherman-Morrison - EXEMPLO

Calculando a inversa:

$$(B^{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3333332 & 1.023852 \times 10^{-5} & 1.615701 \times 10^{-5} \\ 2.108607 \times 10^{-3} & -3.08688 \times 10^{-2} & 1.53586 \times 10^{-3} \\ 1.660520 \times 10^{-3} & -1.527577 \times 10^{-4} & 5.000768 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

levando à iteração seguinte:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - (B^{(0)})^{-1} F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.4998697 \\ 1.946685 \times 10^{-2} \\ -0.5215205 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora reavaliar F em $x^{(1)}$:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.394465 \times 10^{-4} \\ -0.3443879 \\ 3.188238 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Fórmula de Sherman-Morrison - EXEMPLO

o que, por sua vez nos permite obter o vetor y:

$$y^{(0)} = F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.199611 \\ 1.925445 \\ -8.430143 \end{bmatrix}$$

bem como o vetor s:

$$s^{(0)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.3998697 \\ -8.053315 \times 10^{-2} \\ -0.4215204 \end{bmatrix}.$$

Começamos agora a aplicar Sherman-Morrison em si:

$$(s^{(0)})^T (B^{(0)})^{-1} y^{(0)} = 0.3424604$$

Fórmula de Sherman-Morrison - EXEMPLO

$$(B^{(1)})^{-1} = (B^{(0)})^{-1} + (1/0.3424604)[(s^{(0)} - (B^{(0)})^{-1}y^{(0)})(s^{(0)})^T(B^{(0)})^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3333781 & 1.11050 \times 10^{-5} & 8.967344 \times 10^{-6} \\ -2.021270 \times 10^{-3} & -3.094849 \times 10^{-2} & 2.196906 \times 10^{-3} \\ 1.022214 \times 10^{-3} & -1.650709 \times 10^{-4} & 5.010986 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

e finalmente:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - (B^{(1)})^{-2}F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.4999863 \\ 8.737833 \times 10^{-3} \\ -0.5231746 \end{bmatrix}$$