Tópico 4 - Sistemas Lineares Métodos Iterativos

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Introdução

- Generalização do método de ponto fixo que permite aproximar a solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de ordem $n \times n$
- Transforma sistema original em $\varphi(x) = Cx + g$ e itera partindo de um vetor incial $x^{(0)}$:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \varphi(x^{(0)}) = Cx^{(0)} + g \\ x^{(2)} &= \varphi(x^{(1)}) = Cx^{(1)} + g \\ &\vdots \\ x^{(k+1)} &= \varphi(x^{(k)}) = Cx^{(k)} + g \end{aligned}$$

- Critério de parada exige que a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ seja suficientemente pequena
- Distância esta definida por

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$$

ou pela distância relativa: $d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq k \leq n} |x_i^{(k)}|}$

Outline

Gauss-Jacobi

Partimos do seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Assumindo $a_{ii} \neq 0$ podemos obter x_i do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{22}(b_2 - a_{21}x_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{nn}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}) \end{cases}$$

Gauss-Jacobi

Isso permite que se re-escreva o sistema como $x = Cx + g$ se usarmos as seguintes definições:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{12}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, dada uma aproximação incial $x^{(0)}$, aplicar iterativamente:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g, k = 0, 1, 2, \dots$$

Gauss-Jacobi: Exemplo

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

cuja solução exata é $x = [1 \quad 2 \quad -1 \quad 1]^T$. Partimos de $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6 + 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_2 &= \tfrac{25}{11} + \tfrac{1}{11}x_1 + \tfrac{1}{11}x_3 - \tfrac{3}{11}x_4 \\ x_3 &= -1.1 - 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_4 \\ x_4 &= \tfrac{15}{8} - \tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{8}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.6 \\ x_2^{(1)} &= \tfrac{25}{11} = 2.2727 \\ x_3^{(1)} &= -1.1 \\ x_4^{(1)} &= \tfrac{15}{8} = 1.8750 \end{aligned}$$

Gauss-Jacobi: Exemplo

Portanto, $x^{(1)} = [0.6 \quad 2.2727 \quad -1.1 \quad 1.8750]^T$. Continuando:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= 0.6 + 0.1 * 2.2727 - 0.2 * (-1.1) = 1.0473 \\
x_2^{(2)} &= \tfrac{25}{11} + \tfrac{1}{11} * 0.6 + \tfrac{1}{11} * (-1.1) - \tfrac{3}{11} * 1.8750 = 1.7159 \\
x_3^{(2)} &= -1.1 - 0.2 * 0.6 + 0.1 * 2.2727 + 0.1 * 1.8750 = -0.8052 \\
x_4^{(2)} &= \tfrac{15}{8} - \tfrac{3}{8} * 2.2727 + \tfrac{1}{8} * (-1.1) = 0.8852
\end{aligned}
$$

$x^{(2)} = [1.0473 \quad 1.7159 \quad -0.8052 \quad 0.8852]^T$

Gauss-Jacobi: Algoritmo

Algoritmo 1: Gauss-Jacobi

$k \leftarrow 1$;
enquanto $k \leq N$ **faça**
  para $i = 1$ **até** n **faça**
    $x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} (a_{ij} X0_j) + b_i \right]$
  fim
  se $\|x - X0\| < TOL$ **então**
    PARAR;
  fim
  $k \leftarrow k + 1$;
  para $i = 1$ **até** n **faça**
    $X0_i \leftarrow x_i$
  fim
fim
retorna x;

Convergência de Métodos Iterativos

Auto-valor

A constante λ é um auto-valor de uma matriz A se $\det(A - \lambda I) = 0$

Raio espectral

$$\rho(A) = \max |\lambda|,$$

em que λ é um auto-valor. No caso de λ complexo considerar sua magnitude.

Teorema

Para qualquer $x^{(0)}$ a sequência $\{x^{(k)}\}_{x=0}^{\infty}$ definida por

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g, k = 1, 2, \dots$$

convergirá para a solução única de $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{g}$ se e somente se $\rho(C) < 1$.

Gauss-Jacobi: Convergência

Na prática, podemos usar critérios mais simples, que não exijam cálculo de auto-valores.

Critério das Linhas

Definamos $\alpha_k = (\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|)/|a_{kk}|$. Então se $\alpha = \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k < 1$, Gauss-Jacobi gera uma sequência convergente para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ escolhida.

Sempre que o critério das linhas não for satisfeito pode-se tentar uma permutação de linhas/colunas (nem sempre resolve):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Outline

Gauss-Seidel

- Novidade em relação a Gauss-Jacobi é que agora no cálculo de $x_j^{(k+1)}$ usamos $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os $x_{j+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ nas posições restantes:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\
\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)})
\end{cases}
$$

Gauss-Seidel: Exemplo

Seja o sistema anterior partindo do mesmo $x^{(0)}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6 + 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_2 &= \tfrac{25}{11} + \tfrac{1}{11}x_1 + \tfrac{1}{11}x_3 - \tfrac{3}{11}x_4 \\ x_3 &= -1.1 - 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_4 \\ x_4 &= \tfrac{15}{8} - \tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{8}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.6 \\ x_2^{(1)} &= \tfrac{25}{11} + \tfrac{1}{11} * 0.6 = 2.3272 \\ x_3^{(1)} &= -1.1 - 0.2 * 0.6 + 0.1 * 2.3272 = -0.9873 \\ x_4^{(1)} &= \tfrac{15}{8} - \tfrac{3}{8} * 2.3272 + \tfrac{1}{8} * (-0.9873) = 0.8789 \end{aligned}$$

Gauss-Seidel: Exemplo

Na etapa 2:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= 0.6 + 0.1 * 2.3273 - 0.2 * (-0.9873) = 1.030 \\
x_2^{(2)} &= \tfrac{25}{11} + \tfrac{1}{11} * 1.030 + \tfrac{1}{11} * (-0.9873) - \tfrac{3}{11} * 0.8789 = 2.037 \\
x_3^{(2)} &= -1.1 - 0.2 * 1.030 + 0.1 * 2.037 + 0.1 * 0.8789 = -1.014 \\
x_4^{(2)} &= \tfrac{15}{8} - \tfrac{3}{8} * 2.037 + \tfrac{1}{8} * (-1.014) = 0.9844
\end{aligned}
$$

Note a convergência mais rápida para $x = [1 \quad 2 \quad -1 \quad 1]^T$.

Gauss-Seidel: Algoritmo

Algoritmo 2: Gauss-Seidel

$k \leftarrow 1$;
enquanto $k \leq N$ **faça**
  para $i = 1$ **até** n **faça**
    $x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} X0_j) + b_i \right]$
  fim
  se $\|x - X0\| < TOL$ **então**
    PARAR;
  fim
  $k \leftarrow k + 1$;
  para $i = 1$ **até** n **faça**
    $X0_i \leftarrow x_i$
  fim
fim
retorna x;

Gauss-Seidel: Função de Iteração

Gauss-Seidel também pode ser escrito na forma

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$$

se definirmos C e g do seguinte modo:

$$C = -(I + L_1)^{-1} R_1 \quad g = (I + L_1)^{-1} D^{-1} b$$

em que as matrizes L_1 e R_1 são definidas por

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel-Convergência

Critério de Sassenfeld

Definamos

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

e

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + a_{j(j-1)}\beta_{j-1} + |a_{j(j+1)}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|},$$

$$\text{para } j = 2, 3, \ldots, n$$

Se $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \beta_j < 1$, então Gauss-Seidel converge para qualquer $x^{(0)}$. Quanto menor for β, mais rápida a convergência.

Critério de Sassenfeld - Exemplo

No sistema anterior temos

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+|a_{14}|}{|a_{11}|} = \frac{|-1|+|2|+|0|}{|10|} = 0.3$$
$$\beta_2 = \frac{|a_{21}|\beta_1+|a_{23}|+|a_{24}|}{|a_{22}|} = \frac{|-1|*0.3+|-1|+|3|}{|11|} \approx 0.39$$
$$\beta_3 = \frac{|a_{31}|\beta_1+|a_{32}|\beta_2+|a_{34}|}{|a_{33}|} = \frac{|2|*0.3+|-1|*0.39+|-1|}{|10|} \approx 0.199$$
$$\beta_4 = \frac{|a_{41}|\beta_1+|a_{42}|\beta_2+|a_{43}|\beta_3}{|a_{44}|} = \frac{|0|*0.3+|3|*0.39+|-1|*0.199}{|8|} \approx 0.171$$

Portanto, $\beta < 1$!

Critério de Sassenfeld - Demonstração

Queremos que o vetor $\mathbf{x}^{(k)}$ convirja para o vetor $\mathbf{x}$. Definimos então o erro $e_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i$ e desejamos que $\lim_{k\to\infty} e_i^{(k)} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$.
Aplicando a definição, temos:

$$e_1^{(k+1)} = x_1^{(k+1)} - x_1 = \left[\frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})\right] - \left[\frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)\right] =$$
$$\frac{1}{a_{11}}\left[(-a_{12}x_2^{(k)} + a_{12}x_2) + (-a_{13}x_3^{(k)} + a_{13}x_3) + \cdots + (-a_{1n}x_n^{(k)} + a_{1n}x_n)\right] =$$
$$-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}e_2^{(k)} + a_{13}e_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}e_n^{(k)})$$

Critério de Sassenfeld - Demonstração

Semelhantemente:

$$e_2^{(k+1)} = x_2^{(k+1)} - x_2 = \left[\frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})\right] - \left[\frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)\right] =$$

$$\frac{1}{a_{22}}\left[(-a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{21}x_1) + (-a_{23}x_3^{(k)} + a_{23}x_3) + \cdots + (-a_{2n}x_n^{(k)} + a_{2n}x_n)\right]$$

$$-\frac{1}{a_{22}}(a_{21}e_1^{(k+1)} + a_{23}e_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}e_n^{(k)})$$

Até que na última linha:

$$e_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}e_1^{(k+1)} + a_{n2}e_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}e_{n-1}^{(k+1)})$$

Definamos agora $E^{(k)} = \max_{1\leq i\leq n}\{e_i^{(k)}\}$.

Assim, a condição $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ implica que $\lim_{k\to\infty} E^{(k)} = 0$.

Critério de Sassenfeld - Demonstração

Mostremos por indução que $E^{(k+1)} \leq \beta E^{(k)}$, sendo β como definido no critério de Sassenfeld

Para $i = 1$, lembrando que $|x+y| \leq |x| + |y|$:

$$|e_1^{(k+1)}| \leq |\tfrac{1}{a_{11}}|(|a_{12}||e_2^{(k)}| + |a_{13}||e_3^{(k)}| + \cdots + |a_{1n}||e_n^{(k)}|) \leq \frac{1}{a_{11}}(|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|)\max_{1\leq j\leq n}\{e_j^{(k)}\} = \beta_1 \max_{1\leq j\leq n}\{e_j^{(k)}\} \leq \beta \max_{1\leq j\leq n}\{e_j^{(k)}\}$$

Vamos definir como hipótese para a indução o seguinte:

$$\begin{gathered}
|e_2^{(k+1)}| \leq \beta_2 \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\} \\
|e_3^{(k+1)}| \leq \beta_3 \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\} \\
\vdots \\
|e_{i-1}^{(k+1)}| \leq \beta_{i-1} \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\}, i \leq n
\end{gathered}$$

Critério de Sassenfeld - Demonstração

Precisamos mostrar então que $|e_i^{(k+1)}| \leq \beta_i \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\}$

Escrevendo $|e_i^{(k+1)}|$ como anteriormente:

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i1}||e_1^{(k+1)}| + |a_{i2}||e_2^{(k+1)}| + \cdots + |a_{i,i-1}||e_{i-1}^{(k+1)}|)+ \\ \frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i,i+1}||e_{i+1}^{(k)}| + \cdots + |a_{in}||e_n^{(k)}|)$$

Usando a hipótese da indução na expressão acima e lembrando que $|e_j^{(k)}| \leq \max_{1\leq j\leq n}\{e_j^{(k)}\}, \forall j$:

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i1}\beta_1| + |a_{i2}\beta_2| + \cdots + |a_{i,i-1}\beta_{i-1}|+ \\ |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|) \max_{1\leq j\leq n}\{e_j^{(k)}\}$$

Mas a expressão acima contém exatamente a definição de β_i no critério de Sassenfeld e assim:

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \beta_i \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\} \leq \beta \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\}, \forall i, 1 \leq i \leq n$$

Critério de Sassenfeld - Demonstração

Voltando à definição de $E^{(k+1)}$:

$$\max_{1\leq i\leq n}\{e_i^{(k+1)}\} = E^{(k+1)} \leq \beta \max_{1\leq j\leq n}\{|e_j^{(k)}|\} = \beta E^{(k)}$$

Assim, $E^{(k)} \leq \beta E^{(k-1)} \leq \beta(\beta E^{(k-2)}) \leq \cdots \leq \beta^k E^{(0)}$, e portanto se $\beta < 1$, $\lim_{k\to\infty} E^{(k)} = 0$ e portanto temos a convergência independendo da aproximação incial escolhida e quanto menor β mais rápida a convergência.

Gauss-Seidel-Convergência

Critério das linhas

Critério usado em Gauss-Jacobi. Seja

$$\alpha_k = \Big(\sum_{j=1, j \neq k}^{n} |a_{kj}| \Big) / |a_{kk}|$$

Se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então Gauss-Seidel converge.

Critério das linhas - Demonstração

Devemos provar que se o critério das linhas for satisfeito, automaticamente o de Sassenfeld também o é.

$$\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + a_{1n})/|a_{11}| = \alpha_1 < 1$$

Vamos supor por hipótese de indução que $\beta_i \leq \alpha_i < 1$ para $i = 2, 3, \ldots, k-1$ e mostrar que $\beta_k \leq \alpha_k < 1$:

$$\beta_k = (\beta_1 a_{k1} + \cdots + \beta_{k-1} a_{k,k-1} + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}|)/|a_{kk}| <$$
$$(|a_{k1}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}|)/|a_{kk} = \alpha_k$$

Portanto, $\beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \ldots, n$ e $\alpha_i < 1$ implica $\beta_i < 1$ satisfazendo o critério de Sassenfeld.

Comparação entre os métodos

- Métodos diretos sempre obtêm uma solução em passos finitos. Já os iterativos exigem condições para convergência
- Métodos diretos podem sem problemáticos para matrizes esparsas, pois fazem com que surjam elementos não-nulos onde antes era zero, comprometendo a esparsidade da matriz
- Métodos diretos são propensos a erros de arredondamento, embora o pivoteamento amenize isso. Métodos iterativos são menos sensíveis a estes erros já que se houver convergência ela independe do vetor inicial e consequentemente de qualquer outro vetor intermediário
- Métodos iterativos são mais usados em sistemas grandes e esparsos. Ex.: Circuitos, problemas de valores de contorno, equações diferenciais parciais, etc.

Outline

Condicionamento

No caso de um sistema linear de equações $Ax = b$, diz-se que o mesmo é mal-condicionado se uma pequena alteração na matriz A ou no vetor b gera uma grande alteração no vetor solução x.

EXEMPLO 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

cuja solução é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo uma pequena alteração:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{pmatrix}$$

e a solução muda para:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.999 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Ou então mexendo levemente na matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1.001 & 2.001 \\ 2.001 & 3.998 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

e a solução se torna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.989 \\ -1.497 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

EXEMPLO 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

cuja solução é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo uma pequena alteração do lado direito:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{pmatrix}$$

e a solução muda para:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Ou então mexendo levemente na matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1.001 & 2.001 \\ 2.001 & 3.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

e a solução se torna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.003 \\ 0.997 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Um sistema mal-condicionado não é confiável para uma solução numérica

Para estimar o número de dígitos significativos em que podemos confiar, devemos definir o conceito de **condição da matriz**, que será usado em conjunto com o ϵ da máquina

Toda matriz inversível tem um número de condição

Utiliza o conceito de **norma** de uma matriz

Condicionamento

Norma é um escalar definido para todas as matrizes e que é sempre positivo, exceto para a matriz nula, quando é 0

Uma norma típica para uma matriz $m \times n$ é a **norma linha**

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

EXEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \|A\|_\infty = ?$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1|+|-3|+|4|, |2|+|2|+|5|, |6|+|3|+|-1|\} = \max\{8, 9, 10\} = 10$$

Condicionamento

Voltando agora ao nosso sistema mal-condicionado e denotando-o na forma $AX = C$, tal que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

Calculando as normas:

$$\|A\|_\infty = 5.999 \qquad \|X\|_\infty = 2 \qquad \|C\|_\infty = 7.999$$

Agora com uma leve alteração no lado direito:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} -3.999 \\ 4.000 \end{pmatrix} C' = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Calculamos agora a variação no vetor do lado direito e no vetor solução:

$$\Delta C = C' - C = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = X' - X = \begin{pmatrix} -3.999 \\ 4.000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.999 \\ 3.000 \end{pmatrix}$$

Consequentemente:

$$\|\Delta C\|_\infty = 0.001 \qquad \|\Delta X\|_\infty = 5.999$$

Ou ainda, em termos de diferença relativa:

$$\frac{\|\Delta C\|_\infty}{\|C\|_\infty} = \frac{0.001}{7.999} = 1.25 \times 10^{-4} \qquad \frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{5.999}{2} = 2.9995$$

Repare como uma variação tão pequena em C reflete em mudança várias ordens de grandeza maior em X!!!

Condicionamento

De fato, se compararmos:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty / \|X\|_\infty}{\|\Delta C\|_\infty / \|C\|_\infty} = \frac{2.9995}{1.25 \times 10^{-4}} = 23996$$

Agora, repetindo as contas para o sistema bem-condicionado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calculando as normas:

$$\|A\|_\infty = 5 \qquad \|X\|_\infty = 2 \qquad \|C\|_\infty = 7$$

Agora com uma leve alteração no lado direito:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{pmatrix} C' = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

Calculamos agora a variação no vetor do lado direito e no vetor solução:

$$\Delta C = C' - C = \begin{pmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = X' - X = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

Consequentemente:

$$\|\Delta C\|_\infty = 0.001 \qquad \|\Delta X\|_\infty = 0.001$$

Ou ainda, em termos de diferença relativa:

$$\frac{\|\Delta C\|_\infty}{\|C\|_\infty} = \frac{0.001}{7} = 1.4286 \times 10^{-4} \qquad \frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{0.001}{2} = 0.0005$$

Condicionamento

Desta vez, se compararmos:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty / \|X\|_\infty}{\|\Delta C\|_\infty / \|C\|_\infty} = \frac{0.0005}{1.4286 \times 10^{-4}} \approx 3.5$$

Pergunta: Existe alguma relação geral entre

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \text{ e } \frac{\|\Delta C\|}{\|C\|} \text{ ou entre } \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \text{ e } \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \text{ ?}$$

Se sim, esta relação poderia identificar sistemas bem e mal-condicionados e quantificar o grau de condicinamento dos sitemas? E indo além, permitiria estimar o número de dígitos confiáveis na solução numérica?

A resposta é SIM!!!

Condicionamento

E a relação é dada por:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|}$$

e

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

O fator de amplificação é portanto o produto $\|A\|\|A^{-1}\|$

Este número é chamado de **condição** da matriz: $Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

É desejável que $Cond(A) \approx 1$

Condicionamento

Além disso, $Cond(A)$ em conjunto com ϵ_{maq} permite estimar o número de dígitos significativos corretos na solução numérica, dado que:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \frac{\|X' - X\|}{\|X\|} \leq Cond(A)\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|}$$

Mesmo que não haja variação em C fornecido à máquina $(C = C')$, podemos ainda ter um erro de arredondamento cujo méximo é ϵ_{maq} e portanto não temos como garantir que um erro relativo menor do que $Cond(A) \times \epsilon_{maq}$ ocorra

Por isso que na solução de $AX = C$ dizemos que podemos ter m dígitos de confiança, tal que m é o maior inteiro satisfazendo
$\frac{1}{2} \times 10^{-m} > Cond(A) \times \epsilon_{maq}$

Condicionamento

EXEMPLO 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7.999 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -3999 & 2000 \\ 2000 & -1000 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 5.999 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 5999$$

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \approx 35988$$

Vamos assumir 24 dígitos na mantissa e no padrão iso C então teremos $\epsilon_{maq} = 2^{-(24-1)} = 0.119209 \times 10^{-6}$

$Cond(A)\epsilon_{maq} = 0.429 \times 10^{-2}$ (2 dígitos de confiança!)

Condicionamento

EXEMPLO 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 5 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 5$$

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 25$$

$Cond(A)\epsilon_{maq} = 0.298023 \times 10^{-5}$ (5 dígitos de confiança!)

Propriedades da norma de matrizes

- Para qualquer matriz A, $\|A\| \geq 0$
- Dada uma matriz A e um escalar k, $\|kA\| = k\|A\|$
- Para duas matrizes A e B de mesma ordem, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- Para duas matrizes A e B que podem ser multiplicadas, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Demonstração da relação de normas e condicionamento

Proposição: $\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Prova: Começamos com $AX = C$. Se A é alterado para A', X é alterado para X' e o sistema continua válido:
$A'X' = C$

Juntando as duas equações acima temos $AX = A'X'$

Mas sabemos também que
$\Delta A = A' - A$ e $\Delta X = X' - X$
Portanto, $AX = (A + \Delta A)(X + \Delta X)$

Demonstração da relação de normas e condicionamento

Expandindo a última equação:

$AX = (A + \Delta A)(X + \Delta X)$

$AX = AX + A\Delta X + \Delta AX + \Delta A\Delta X$

Subtraindo AX dos dois lados temos:

$0 = A\Delta X + \Delta AX + \Delta A\Delta X$

$-A\Delta X = \Delta A(X + \Delta X)$

$\Delta X = -A^{-1}\Delta A(X + \Delta X)$

Lançando mão da propriedade do produto das normas:

$\|\Delta X\| \leq \| - A^{-1}\|\|\Delta A\|\|X + \Delta X\|$

Agora, multiplicamos ambos os lados por $\|X + \Delta X\|^{-1}$ enquanto que no lado direito multiplicamos em cima e embaixo por $\|A\|$:

$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$