Tópico 2 - Zeros de Funções

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Introdução

- Problema de fundamental importância na ciência: encontrar x tal que

$$f(x) = 0$$

EXEMPLO: Crescimento de população.

Seja $N(t)$ o número de indivíduos no tempo e λ uma taxa de nascimento constante.

Pode se supor que, para um período curto de tempo em uma população isolada (sem imigração), que a taxa de crescimento instantânea no tempo t é proporcional ao número de indivíduos naquele exato momento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

e a solução é $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, sendo N_0 a população inicial.

Introdução

Quando ocorre imigração a uma taxa constante ν o modelo passa a ser

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \nu$$

e a solução $N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$.

Considere então o caso em que $N_0 = 1000$ e ao final de um ano temos 435 imigrações para a comunidade e $N(1) = 1564$.

Queremos encontrar a taxa λ e a figura a seguir mostra a equação para $N(\lambda)$. O λ desejado deve satisfazer:

$$1564 = 1000e^{\lambda} + \frac{435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

Introdução

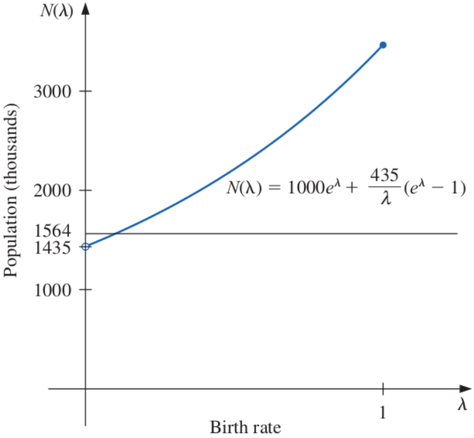


Figura : Fonte: Burden & Faires

Introdução

- Função pode ser dada em forma explícita, como um polinômio ou uma exponencial, ou implícita, por exemplo, a solução de uma equação diferencial

- Na maioria das vezes, apenas raízes aproximadas podem ser encontradas

- Dois sentidos para "aproximar a raiz por $\overline{x}$": fazer $|f(\overline{x})|$ ser o menor possível ou chegar próximo de uma solução já conhecida

- Solução sujeita a instabilidade e erros de arredondamento

Outline

Procedimentos Preliminares

- Duas fases: **I) Isolamento** e **II) Refinamento**
- Na Fase I usamos os seguintes teoremas

Teoremas do Valor Intermediário e Rolle

Se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então existe uma raiz χ de $f(x)$ entre a e b (Teorema do Valor Intermediário - TVI). E mais, se além disso $f'(x)$ existir e preservar sinal em (a, b) então a raiz no intervalo é única (Teorema de Rolle).

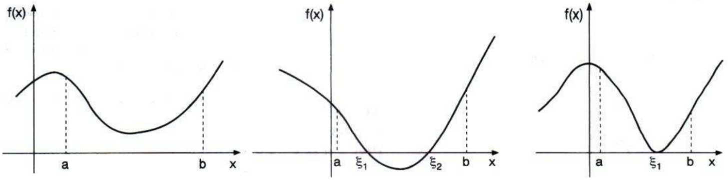


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Procedimentos Preliminares

Tabelar $f(x)$ e $f'(x)$

Ex.: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

x	0	1	2	3	...
f(x)	$-$	$-$	$+$	$+$	...

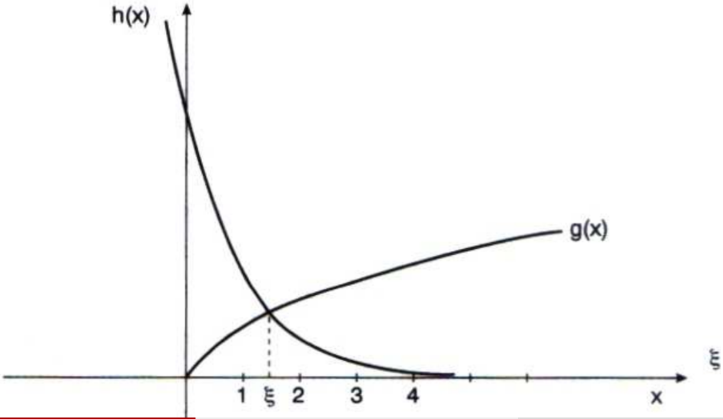
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \forall x > 0$ (as duas parcelas somadas são sempre > 0)

Assim, $f(x)$ admite um único zero em $(1, 2)$!

Procedimentos Preliminares

Inspecionar o gráfico da função $f(x)$.

Se $f(x)$ pode ser reescrita como $g(x) = h(x)$, a raiz é o ponto em que se interceptam. No exemplo, fazendo o gráfico de $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 5e^{-x}$:



Procedimentos Preliminares

- Refinamento: Métodos iterativos

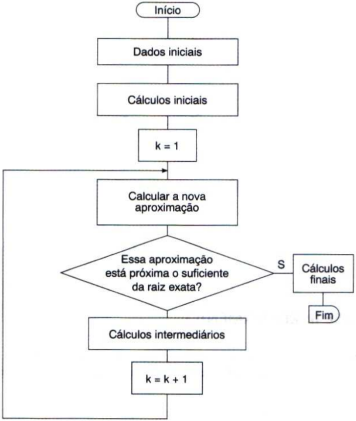


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Procedimentos Preliminares

Critérios de parada:

- $|\overline{x} - \xi| < \epsilon$
- $f(\overline{x}) < \epsilon$

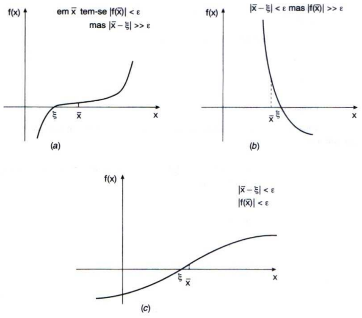


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Procedimentos Preliminares

Como em geral não se conhece ξ, pode-se substituir no critério 1 $|\overline{x} - \xi| < \epsilon$ por $|b - a| < \epsilon$ em que $[a, b]$ é um intervalo que sabidamente contém ξ

Os critérios acima expressam erros absolutos. Como vimos erros relativos são mais precisos. Neste caso, os critérios ficam:

- $\frac{|\overline{x}-\xi|}{|L|} < \epsilon$
- $\frac{f(\overline{x})}{|L|} < \epsilon$ em que L é um valor de x na vizinhança de ξ

Importante também definir número máximo de iterações para prevenir erros na escolha do método ou de programação

Outline

Método da Bissecção

- **Método da Bissecção (busca binária):** Divide o intervalo que contém a raiz em duas partes iguais recursivamente
- Faz uso do TVI: se uma função contínua muda de sinal nos extremos então existe ao menos uma raiz no intervalo
- Teorema de Rolle: se houver mais de uma raiz no intervalo então $f'(x)$ também vale zero em algum ponto do intervalo

Método da Bissecção

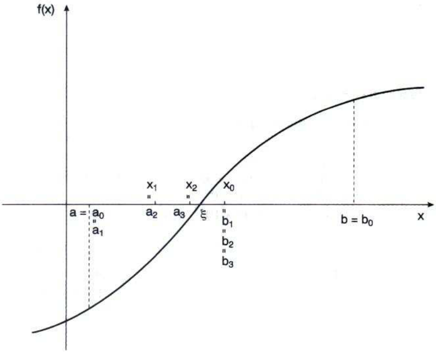


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Método da Bissecção

Ex.: $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$

$f(1) = -1 < 0 < 5 = f(2)$
Como $f(x)$ é contínua, deve existir um zero em $[1, 2]$.
Como $f'(x) = 3x^2 - 1$ é positiva em $[1, 2]$, o zero é único.
$\xi \approx 1.5 \pm 0.5$

Avaliamos agora em $x = 1.5$:
$f(1.5) = 0.875 > 0 > -1 = f(1)$
Portanto: $\xi \in [1, 1.5]$ e $\xi = 1.25 \pm 0.25$

Avaliamos agora em $x = 1.25$:
$f(1.25) = -0.296 < 0 < 0.875 = f(1.5)$
Portanto: $\xi \in [1.25, 1.5]$ e $\xi = 1.375 \pm 0.125$

Método da Bissecção

Método da Bissecção

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a_0, b_0]$ e tal que $f(a_0)f(b_0) \leq 0$,

Algoritmo 1: Método da Bissecção

para $k = 0$ **até** *desejado* **hacer**
  $m \leftarrow (a_k + b_k)/2$;
  se $f(a_k)f(m) \leq 0$ **então**
    $a_{k+1} \leftarrow a_k, b_{k+1} \leftarrow m$;
  senão
    $a_{k+1} \leftarrow m, b_{k+1} \leftarrow b_k$;
  fim
fin
retorna *Intervalo* $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ *contendo a raiz de* $f(x)$

Método da Bissecção

Vários critérios podem ser usados para parada:

$|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$
$|f(x_k)| < \epsilon$
$|b_k - a_k| < \epsilon$

Sem conhecimento prévio de f e ξ, é melhor o teste do erro relativo:

$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \epsilon$

Cuidado com os critérios acima!! Mesmo que $|x_k - x_{k-1}| \to 0$ a sequência em si pode divergir! O exemplo mais icônico é a série harmônica:
$x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$

Um número máximo de iterações no computador também deve ser estipulado.

Método da Bissecção

Demonstração de Convergência para a Raiz:

Vamos tratar os valores assumidos por a_k, b_k e x_k como independentes:

- $\{a_k\}$: sequência não-decrescente (sempre se desloca para a direita, do contrário cairia fora do intervalo!) e limitada superiormente por b_0. TEOREMA: Toda sequência limitada e monotônica é convergente. Portanto:

$$\exists r \in \Re : \lim_{k \to \infty} a_k = r$$

- $\{b_k\}$: sequência não-crescente e limitada inferiormente por a_0.

$$\exists s \in \Re : \lim_{k \to \infty} b_k = s$$

- $\{x_k\}$: por construção $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ e $a_k < x_k < b_k, \forall k$

Método da Bissecção

Sabemos também que

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$$

Como os limites de $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ existem:

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k \Rightarrow r = s$$

Chamamos agora este limite comum $r = s$ de l. Pelo Teorema do confronto (sanduíche), sabemos que como $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$ e $a_k < x_k < b_k$, então:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = l$$

Agora precisamos provar que $f(l) = 0$.

Método da Bissecção

Sabemos que $\forall k, f(a_k)f(b_k) < 0$. Usando a propriedade do produtos dos limites e a definição de função contínua ($\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(\lim_{k\to\infty} a_k)$):

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\lim_{k\to\infty} a_k)f(\lim_{k\to\infty} b_k) =$$

$$= f(r)f(s) = [f(l)]^2$$

Como f é real $[f(l)]^2 \geq 0$ e assim:

$$0 \geq [f(l)]^2 \geq 0$$

e finalmente $f(l) = 0$. c.q.d.

Método da Bissecção

Número k de iterações para que $b_k - a_k < \epsilon$, ou seja, $|x - \xi| < \epsilon$:

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$$

Demonstração:

$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \Rightarrow b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \Rightarrow$

$b_k - a_k < \epsilon \Rightarrow \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \epsilon \Rightarrow \epsilon > \frac{b_0 - a_0}{2^k} \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \Rightarrow$

$k \log(2) > \log(a_0 - b_0) - \log(\epsilon) \Rightarrow$

$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$

Método da Bissecção

EXEMPLO:
Quantas iterações preciso para encontrar a raiz da equação abaixo em $[2, 3]$ com precisão $\epsilon = 10^{-2}$:

$$f(x) = x \log(x) - 1$$

Temos então:

$$k > \frac{\log(3-2) - \log(10^{-2})}{\log(2)} = \frac{\log(1) + 2\log(10)}{\log(2)} = \frac{2}{0.3010} \approx 6.64 \Rightarrow k = 7.$$

Método da Bissecção

CUIDADOS

Quando $b_k - a_k < \epsilon_{maq}$ o valor de $\frac{a_k+b_k}{2}$ pode cair até mesmo fora do intervalo atual, em função do erro de arredondamento

Por isso é preferível usar $x_k = a_k + \frac{b_k-a_k}{2}$

Em vez do teste $f(a_k)f(x_k) < 0$ é também preferível usar $sgn(f(a_k))sgn(f(x_k)) < 0$ para prevenir overflow ou underflow

Método da Bissecção

VANTAGENS E DESVANTAGENS

- V - Se $f(x)$ é contínua e troca de sinal em $[a, b]$, o método da bissecção sempre gera uma sequência convergente para a raiz
- V - Cálculos simples
- V - Boa opção para fornecer uma estimativa inicial a outros métodos
- D - A convergência de x_k para ξ se dá em ordem 2^{-k}
- D - A convergência é muito lenta se $b_0 - a_0 >> \epsilon$. Testes de parada com $|f(x_k)|$ e número de iterações podem ser incluídos para amenizar isto.

Outline

Regula falsi

- O valor de $f(x)$ nos extremos pode ser usado para obter uma estimativa mais precisa para o ponto intermediário
- Ex.: $f(1) = -1 < 0 < 5 = f(2)$. Como $|f(1)|$ está mais próximo da raiz, é razoável escolher um ponto médio mais próximo de 1 usando média ponderada
- Método chamado **falsa posição** ou **regula falsi**

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

já que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos.

Regula falsi

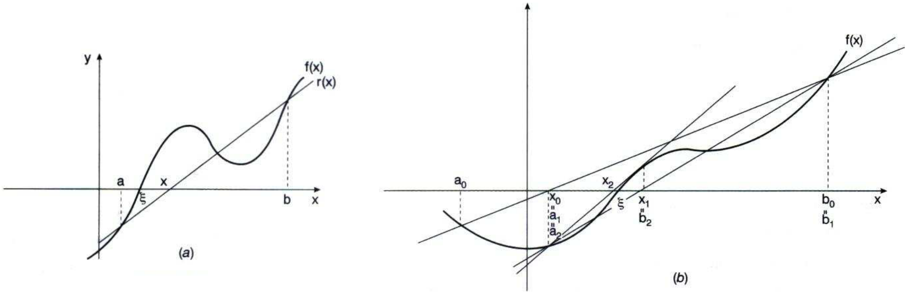


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Ponto x_k é onde uma reta passando por $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ intercepta o eixo x, portanto esta reta é secante a $f(x)$

Regula falsi

No Ex. anterior:

$$w = \frac{|f(2) * 1| + |f(1)| * 2}{|f(2)| + |f(1)|}$$

Como $f(1)$ e $f(2)$ possuem sinais opostos:

$$w = \frac{f(2) * 1 - f(1) * 2}{f(2) - f(1)} = \frac{5 * 1 + 1 * 2}{6} = 1.16666...$$

e

$$f(w) = -0.578703... < 0 < 5 = f(2)$$

Portanto, $\xi \in [1.16666..., 2]$ e repetindo o processo para este intervalo:

$$w = \frac{5 * 1.166666... + 0.578703... * 2}{5.578703...} = 1.253112...$$

$$f(w) = -0.285363... < 0 < 5 = f(2)$$

E, portanto: $\xi \in [1.253112..., 2]$

Regula falsi

Regula falsi

Algoritmo 2: Regula falsi

para $k = 0$ **até** *desejado* **hacer**
  $x \leftarrow [f(b_k)a_k - f(a_k)b_k]/[f(b_k) - f(a_k)]$;
  se $f(a_k)f(w) \leq 0$ **então**
    $a_{k+1} \leftarrow a_k, b_{k+1} \leftarrow x$;
  senão
    $a_{k+1} \leftarrow x, b_{k+1} \leftarrow b_k$;
  fim
fin

- Prova de convergência similar à da bissecção

Regula falsi

Garante $f(\xi)$ pequeno mais rapidamente que bissecção mas falha completamente em garantir intervalo pequeno em torno de ξ . Se côncavo crescente para cima secante sempre acima de $f(x)$, se côncavo para baixo e crescente, secante sempre abaixo (ponto de divisão nunca "passa para o outro lado"!!)

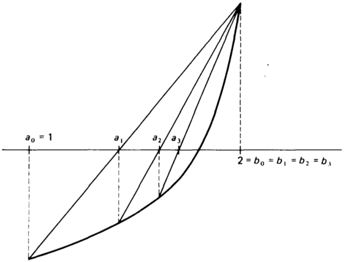


Figura : Fonte: Conte & deBoor

Regula falsi

Modificação substitui secante por retas com inclinação reduzida até w ficar do outro lado da raiz

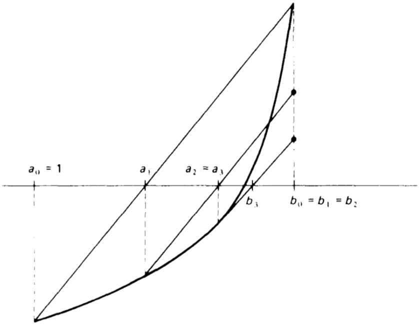


Figura : Fonte: Conte & deBoor

Outline

Iteração de Ponto Fixo

- Grande importância conceitual

- Ideia é transformar equação $f(x) = 0$ em algo do tipo $x = g(x)$ e assim a raiz de $f(x)$ passa a ser um **ponto fixo** (ponto fixo é um conceito usado em outras áreas da matemática, por exemplo, em teorias de equilíbrio em Economia e outras)

- Ex.: $f(x) = x^2 - x - 2$ pode ser transformada de várias formas: $g(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{2 + x}$, etc.

Iteração de Ponto Fixo

Forma geral: $g(x) = x + A(x)f(x)$ tal que se ξ for o ponto fixo de $g(x)$, então devemos ter $A(\xi) \neq 0$

LEMA: Dada a forma geral acima, provar que $g(\xi) = \xi \Leftrightarrow f(\xi) = 0$

1. $g(\xi) = \xi \Rightarrow f(\xi) = 0$:
   $g(\xi) = \xi \Rightarrow \xi = \xi + A(\xi)f(\xi) \Rightarrow A(\xi)f(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ (já que $A(\xi) \neq 0$ por hipótese)

2. $f(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi) = \xi$:
   $f(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi) = \xi$ (já que $f(\xi) = 0$)

Iteração de Ponto Fixo

Iteração de ponto fixo

Dada uma função de iteração $g(x)$ e um ponto inicial x_0:

Algoritmo 3: Iteração de ponto fixo

para $n = 0$ **até** *desejado* **hacer**
    $x_{n+1} \leftarrow g(x_n)$;
fin

NOTA: A função $g(x)$ precisa ser definida no intervalo em questão
Ex. A função real $g(x) = \sqrt{-x}$ não é válida se $x_0 > 0$ pois $x_1 = \sqrt{-x_0}$ não poderia ser calculado

Veremos a seguir as condições para convergência

Iteração de Ponto Fixo

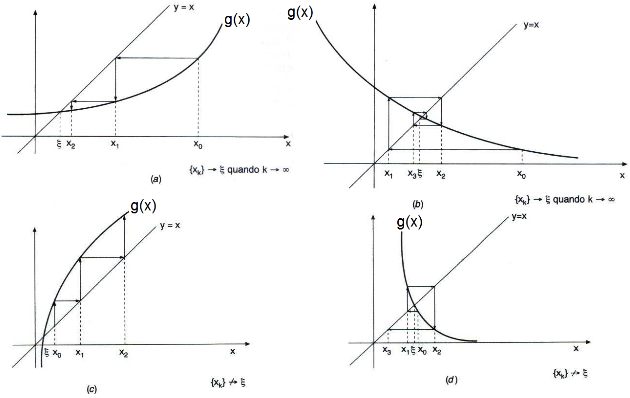


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Fica aparente na figura que a sequência não converge quando o módulo da inclinação de $g(x)$ é muito grande próximo do ponto fixo ξ

Iteração de Ponto Fixo

Para garantir convergência, precisamos encontrar um intervalo $I = [a, b]$ que contenha ξ e x_0 e satisfaça algumas suposições.

Suposição 1

Dado o intervalo $I = [a, b]$, $\forall x \in I$ a função de iteração $g(x)$ é definida e $g(x) \in I$

Por indução, se $x_0 \in I$ então $\forall n$, $x_n \in I$ (já que $x_{n+1} = g(x_n)$)

Iteração de Ponto Fixo

Suposição 2

A função $g(x)$ é contínua em $I = [a, b]$

As suposições 1 e 2 em conjunto garantem que $g(x)$ tem um ponto fixo em $I = [a, b]$.

Prova:

Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$ já encontramos o ponto fixo.

Do contrário, temos $g(a) \neq a$ e $g(b) \neq b$. Pela Suposição 1, $g(a)$ e $g(b)$ estão em I. Portanto, $g(a) > a$ e $g(b) < b$.

Definimos então a função $h(x) = g(x) - x$. Assim, $h(a) > 0$ e $h(b) < 0$.

Como h é contínua em I, pelo teorema do valor intermediário, $h(x)$ possui um zero em I, o que prova exatamente que $g(x)$ possui um ponto fixo em I.

Iteração de Ponto Fixo

Suposição 3

$g(x)$ é diferenciável em $I = [a, b]$ e existe uma constante não-negativa $K < 1$ tal que

$$\forall x \in I : |g'(x)| \leq K$$

Note como isso não é satisfeito em (c) e (d) na figura anterior

Teorema 1

Dadas as suposições 1-3, então $g(x)$ possui exatamente UM ponto fixo $\xi \in I$ e partindo de qualquer ponto $x_0 \in I$, a sequência gerada pelo Algoritmo 6 converge para ξ

Iteração de Ponto Fixo

Prova do Teorema 1:

CONVERGÊNCIA PARA ALGUM PF

Já provamos a existência de um ponto fixo em I.

Sabemos também pela indução sobre a Suposição 1 que todos os pontos do algoritmo de iteração estão em I.

Definimos agora o erro na n-ésima iteração por

$$e_n = \xi - x_n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Como $\xi = g(\xi)$ e $x_n = g(x_{n-1})$:

$$e_n = \xi - x_n = g(\xi) - g(x_{n-1})$$

Iteração de Ponto Fixo

Mas sabemos pelo teorema do valor médio (TVM) para derivadas que:

$$e_n = g(\xi) - g(x_{n-1}) = g'(\eta_n)(\xi - x_{n-1}) = g'(\eta_n)e_{n-1}$$

para algum η_n entre ξ e x_{n-1}

Não sabemos os sinais dos termos envolvidos mas usando a Suposição 3 podemos escrever a seguinte desigualdade em valores absolutos:

$$|e_n| \leq K|e_{n-1}|$$

Como esta desigualdade vale $\forall n$ temos, por exemplo, $|e_{n-1}| \leq K|e_{n-2}| \Rightarrow K|e_{n-1}| \leq K^2|e_{n-2}|$ e sucessivamente:

$$|e_n| \leq K|e_{n-1}| \leq K^2|e_{n-2}| \leq \cdots \leq K^n|e_0|$$

Dado que $0 \leq K < 1$, então $\lim_{n\to\infty} K^n = 0$ e portanto

$$\lim_{n\to\infty} |e_n| \leq \lim_{n\to\infty} K^n|e_0| = 0$$

Este limite garante a convergência para um ponto fixo ξ não importando o erro inicial e_0.

Iteração de Ponto Fixo

UNICIDADE DO PF:

Vamos supor a existência de um outro ponto fixo ζ.

Nada impede de já partirmos de $x_0 = \zeta$ e então $x_1 = g(x_0) = g(\zeta) = \zeta$.

Portanto $x_1 = x_0$ e por consequência $|e_0| = |e_1|$ (já que $\xi - x_0 = \xi - x_1$).

Como sabemos que $|e_1| \leq K|e_0|$ e $K < 1$ a igualdade só ocorre se $|e_0| = 0$, o que implica em

$$\xi = x_0 = \zeta$$

Iteração de Ponto Fixo

- Frequentemente a verificação da suposição 1 é difícil e assim uma condição mais fraca é apresentada pelo corolário abaixo:

Corolário

Se $g(x)$ é continuamente diferenciável em algum intervalo aberto contendo o ponto fixo ξ e $|g'(\xi)| < 1$, então existe um $\epsilon > 0$ tal que $g(x)$ converge sempre que $|x_0 - \xi| \leq \epsilon$

Prova: Devemos provar as suposições 1 e 3 (já que a 2 está explícita no corolário) pois a partir daí o Teorema 1 fecha a demonstração.

A suposição 3 é satisfeita pelo fato de $g'(x)$ ser contínua próximo de ξ e $|g'(\xi)| < 1$. Isso garante que:

$$\exists \epsilon > 0 : |g'(x)| < 1, \text{ para qualquer } x \text{ tal que } |x - \xi| \leq \epsilon$$

A suposição 3 é então satisfeita para $I = [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$.

Iteração de Ponto Fixo

Já em relação à Suposição 1, para $x \in I$, pelo TVM:

$$g(x) - \xi = g(x) - g(\xi) = g'(\eta)(x - \xi)$$

para algum η entre x e ξ e portanto em I.

Porém, como $x \in I \Rightarrow |x - \xi| \leq \epsilon$:

$$|g(x) - \xi| = |g'(\eta)||x - \xi| < \epsilon$$

e assim $g(x)$ está em I se $x \in I$.

NOTA: O ponto fixo ξ tal que $|g'(\xi)| < 1$ é também chamado de **ponto de atração**.

Iteração de Ponto Fixo

Exemplo: $f(x) = x^2 - x - 2$
Raízes 2 e -1. Queremos encontrar $\xi = 2$
Escolhendo $g(x) = x^2 - 2$ temos $g'(x) = 2x$ e portanto $|g'(x)| > 1$ para $\forall x > 1/2$
Suposição 3 não é satisfeita
Partindo de qualquer ponto x_0 a sequência gerada converge para $\xi = 2$ apenas se $\exists n_0 : x_n = 2, \forall n \geq n_0$ (ou seja, por "acidente")

Ex.:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3 \\
x_1 &= x_0^2 - 2 = 7 \\
x_2 &= x_1^2 - 2 = 47 \\
x_3 &= x_2^2 - 2 = 2207 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Iteração de Ponto Fixo

Já usando $g(x) = \sqrt{2+x}$, temos $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$
Tomemos por exemplo o intervalo $[0,7]$. Sabemos que ali $\sqrt{2} \leq g(x) \leq 3$ satisfazendo a suposição 1 e $1/6 \leq g'(x) \leq 1/\sqrt{8}$ satisfazendo a suposição 3

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3 \\
x_1 &= \sqrt{2+x_0} = 2.23607 \\
x_2 &= \sqrt{2+x_1} = 2.05817 \\
x_3 &= \sqrt{2+x_2} = 2.01449 \\
x_4 &= \sqrt{2+x_3} = 2.00362\ldots
\end{aligned}
$$

Iteração de Ponto Fixo

Diz-se que uma sequência $\{x_n\}$ converge para ξ com **ordem de convergência** p se existir um número $p > 1$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C,$$

sendo $e_n = x_n - \xi$ o erro na iteração n. C é chamada de **constante assintótica de erro**.

A convergência é pelo menos linear se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = C, \text{ para } 0 \leq |C| < 1$$

Pode-se demonstrar que métodos de ponto fixo em geral possuem convergência apenas linear

Iteração de Ponto Fixo

DEMONSTRAÇÃO:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi) = g'(\eta_n)(x_n - \xi)$$

para algum η_n entre x_n e ξ pelo TVM para derivadas. Assim:

$$\frac{x_{n+1} - \xi}{x_n - \xi} = \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(\eta_n)$$

Aplicando limites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} g'(\eta_n) = g'(\lim_{n\to\infty} \eta_n)$$

Como η_n está entre x_n e ξ e sabemos que x_n converge para ξ, então pelo teorema do confronto: $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \xi$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(\xi) = C : |C| < 1 \text{ pela condição do Corolário}$$

Iteração de Ponto Fixo

Quanto menor for $g'(\xi)$ mais rápida a convergência!

Existem técnicas para acelerar a convergência, p.ex., Δ^2 de Aitken.

Iteração de Ponto Fixo

VANTAGENS E DESVANTAGENS:

- V - Estudo teórico importante por envolver o conceito de ponto fixo e a técnica de iteração, que será amplamente usada no decorrer do curso
- D - Convergência linear no caso geral não é interessante. Melhora quando passa por exemplo a ser quadrática em variantes como Newton, vista a seguir

Outline

Método de Newton

Sabemos que no MPF quanto menor $g'(\xi)$ mais rápida a convergência. Então é natural que se escolha $g(x)$ tal que $g'(\xi) = 0$. Assim temos então o chamado **Método de Newton-Raphson**:

$$g(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow g'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi) \text{ (já que } f(\xi) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$$

E assim tomamos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Algoritmo 4: Método de Newton

para $n = 0$ **até** *desejado* **hacer**

  $x_{n+1} \leftarrow x_n - f(x_n)/f'(x_n)$;

fin

Método de Newton

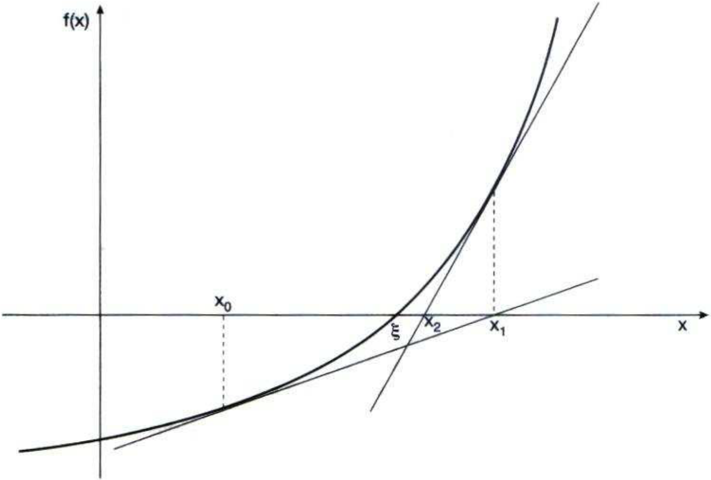


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Método de Newton

EXEMPLO: $f(x) = \cos(x) - x$ Assim: $f'(x) = -\sin(x) - 1$. Raiz conhecida entre 0 e 1. Façamos $x_0 = 0.5$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \tfrac{\cos(x_0)-x_0}{\sin(x_0)+1} = 0.75522 \\
x_2 &= x_1 + \tfrac{\cos(x_1)-x_1}{\sin(x_1)+1} = 0.73914 \\
x_3 &= x_2 + \tfrac{\cos(x_2)-x_2}{\sin(x_2)+1} = 0.73908 \\
x_4 &= x_3 + \tfrac{\cos(x_3)-x_3}{\sin(x_3)+1} = 0.73908
\end{aligned}
$$

Método de Newton

- Convergência: Se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas em um intervalo I que contém a raiz ξ e $f'(\xi) \neq 0$, então existe um intervalo $\bar{I} \subset I$ contendo a raiz tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_n\}$ gerada pelo método de Newton converge para a raiz
- A convergência é de ordem quadrática

Método de Newton

Prova 1: Newton é um caso especial de MPF. Assim, ele também deve satisfazer o Corolário do MPF.

Para demonstrar a convergência devemos então encontrar um intervalo $\bar{I} \subset I$ centrado em ξ e tal que

1. $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em $\bar{I}$
2. $|g'(x)| \leq K < 1, \forall x \in \bar{I}$

Método de Newton

PARTE 1 - Encontrar intervalo em que $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas

Devemos aqui ter bem clara a definição de $g(x)$ e $g'(x)$:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Para $g'(x)$ usamos a regra do quociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Como por hipótese $f'(x)$ é contínua em I e $f'(\xi) \neq 0$ podemos encontrar um intervalo $I_1 \subset I$ em torno de ξ tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I_1$

Dada a definição acima de $g(x)$ e $g'(x)$, a hipótese de que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas em I e o fato de $f'(x) \neq 0$ em I_1 garantem que $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I_1.

Método de Newton

PARTE 2 - Encontrar subintervalo de I_1 em que $|g'(x)| < 1$

$g'(x)$ é contínua em I_1 e $g'(\xi) = 0$ (pela expressão de $g'(x)$ e considerando que $f(\xi) = 0$ por definição)

Então existe um intervalo $I_2 \subset I_1$ tal que $|g'(x)| < 1, \forall x \in I_2$ e I_2 pode ser centrado em ξ.

Fazendo $\bar{I} = I_2$ encontramos então o intervalo buscado.

Método de Newton

Prova 2: Assumimos que $g(x)$ é continuamente diferenciável e que partindo de x_0 a sequência $x_1, x_2, \ldots$ converge para ξ.

O TVM para derivadas garante que

$$e_{n+1} = \xi - x_{n+1} = g(\xi) - g(x_n) = g'(\eta_n)e_n$$

para algum η_n entre ξ e x_n.

Como a convergência é pressuposta, $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ e portanto $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \xi$ e portanto para n suficientemente grande a seguinte aproximação é válida:

$$e_{n+1} \approx g'(\xi)e_n$$

Isso faz com que e_n vá para zero quando $n \to \infty$ mais rapidamente quanto menor for $|g'(\xi)|$ e o cenário ideal ocorreria quando $g'(\xi) = 0$, exatamente como no método de Newton.

Método de Newton

Se $g(x)$ for também duas vezes diferenciável, podemos desenvolver $g(x_n)$ por Taylor em torno de $x_n = \xi$:

$$e_{n+1} = \xi - x_{n+1} = g(\xi) - g(x_n) = g(\xi) - [g(\xi) + g'(\xi)(x_n - \xi) + \frac{1}{2}g''(\eta_n)(x_n - \xi)^2$$

$$= -g'(\xi)(x_n - \xi) - \frac{1}{2}g''(\eta_n)(x_n - \xi)^2$$

para algum η_n entre x_n e ξ. Usando a definição de e_n:

$$e_{n+1} = g'(\xi)e_n - \frac{1}{2}g''(\eta_n)e_n^2$$

Como x_n é suposto convergir para ξ, então η_n também deve convergir para ξ e se $g''(x)$ for contínua em ξ:

$$e_{n+1} \approx -\frac{1}{2}g''(\xi)e_n^2 \text{ para } n \text{ grande}$$

e a convergência é quadrática.

Método de Newton

VANTAGENS E DESVANTAGENS:

- V - Convergência rápida se requisitos forem cumpridos
- D - Aproximação inicial x_0 precisa estar suficientemente próxima de ξ
- D - Exige cálculo da derivada (pode nem ser possível explicitamente)

Outline

Método da Secante

- O método da secante é uma variante de *regula falsi* e de Newton ao mesmo tempo
- Substitui a derivada $f'(x_n)$ cujo cálculo pode ser custoso pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Deste modo:

$$g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \frac{x_n f(x_n) - x_n f(x_{n-1}) - x_n f(x_n) + x_{n-1} f(x_n)}{x_n - x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Método da Secante

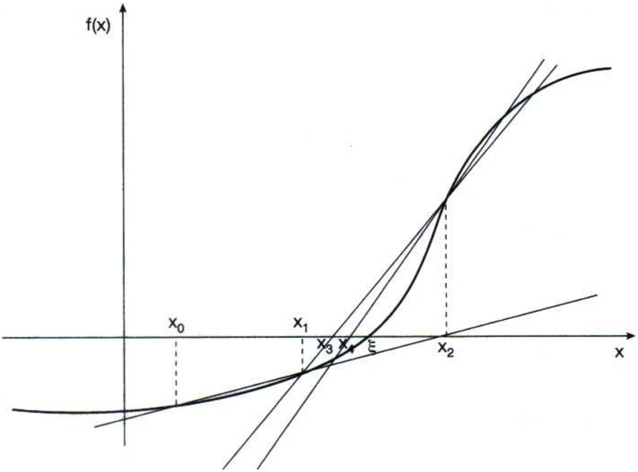


Figura : Fonte: Ruggiero & Lopes

Método da Secante

Partindo de uma função $f(x)$ e duas aproximações iniciais x_{-1} e x_0

Algoritmo 5: Método da secante

para $n = 0$ **até** *desejado* **hacer**

$x_{n+1} \leftarrow [f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n]/[f(x_n) - f(x_{n-1})]$;

fin

- Convergência de ordem 1.618...

Método da Secante

EXEMPLO:
Encontrar a raiz de

$$f(x) = x^2 + x - 6; \qquad \xi_2 = 2; \qquad x_0 = 1.5; \qquad x_1 = 1.7.$$

Iterações:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1.5(-1.41) - 1.7(-2.25)}{-1.41 + 2.25} = 2.03571$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1.7(0.17983) - (2.03571)(-1.41)}{0.17983 + 1.41} = 1.99774$$

Método da Secante

A expressão abaixo é fortemente sujeita a erro de arredondamento:

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Melhor:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{f(x_n)x_n - f(x_{n-1})x_n - f(x_n)x_n + f(x_n)x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= x_n - f(x_n)\tfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned}$$

de modo que $-f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ passa a ser um termo de correção para x_n cujo denominador é a diferença dividida de $f(x)$

Sumário de Métodos de Raízes

- Bissecção e *regula falsi* tem convergência garantida apenas com continuidade e mudança de sinal no intervalo. MPF, Newton e Secante são mais restritivos
- Os 3 últimos porém convergem mais rapidamente se satisfeitas as condições (menos passos)
- Se quisermos encontrar o menor intervalo possível contendo a raiz não podemos contar com *regula falsi* como vimos no caso da função "côncava" nem com MPF e derivados pois a saída que geram são escalares (x_n) e não intervalos

Sumário de Métodos de Raízes

- Se as restrições pudessem ser facilmente satisfeitas e o cálculo da derivada não fosse laborioso, Newton seria a primeira opção. Se apenas o segundo requisito for um problema podemos tentar a Secante
- Bissecção e *regula falsi* podem fornecer aproximações iniciais para métodos como Newton e Secante
- Por fim, tudo vai sempre depender do problema em mãos

Outline

Raízes de Equações Polinomiais

- Embora zeros de polinômios possam ser obtidos pelos métodos anteriores, a ampla disponibilidade destas funções em problemas do mundo real e suas propriedades específicas fazem com que métodos específicos sejam estudados
- Partimos do seguinte polinômio de grau n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \text{ com } a_n \neq 0$$

- Para $n \geq 5$ métodos numéricos iterativos são usualmente necessários para calcular as raízes

Raízes de Equações Polinomiais

- Alguns teoremas são muito úteis neste processo

Teorema fundamental da álgebra

Um polinômio $p(x)$ de grau n ($a_n \neq 0$) possui exatamente n raízes (reais ou complexas) se raízes com multiplicidade r são contadas r vezes

Regra dos sinais de Descartes

O número n_p de zeros positivos de $p(x)$ é menor ou igual ao número de variações v no sinal dos coeficientes de $p(x)$. Além disso, $v - n_p$ é sempre um inteiro par. O número de raízes negativas se obtém semelhantemente de $p(-x)$.

Raízes de Equações Polinomiais

EXEMPLO:

$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$: $v = 3 \Rightarrow n_p \leq 3$.

Podíamos então ter $n_p = 3$ ou 2, 1 ou 0. Mas $v - n_p = 3 - n_p$ deve ser par. Portanto $n_p = 3$ ou $n_p = 1$.

Para o número de raízes negativas:
$p(-x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$: $v = 1 \Rightarrow n_n \leq 1$.

Podíamos então ter $n_n = 1$ ou 0. Mas $v - n_n = 1 - n_n$ deve ser par. Portanto $n_n = 1$.

Raízes de Equações Polinomiais

Se o polinômio $p(x)$ possui o seguinte desenvolvimento de Taylor em torno de $x = \alpha$:

$$p(\alpha) + p'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n,$$

então se chamarmos $x - \alpha$ de y, o número de raízes de $p(x)$ maiores que α é exatamente o número de zeros reais positivos de $p(y)$. Pode ser usado em conjunto com a regra dos sinais.

Raízes de Equações Polinomiais

Teorema de Sturm

Dado um polinômio $p(x)$ de grau n e um real α, construímos a **sequência de Sturm** $g_i(\alpha)$ tal que

$$\begin{cases} g_0(x) = p(x) \\ g_1(x) = p'(x) \\ g_k(x) = -mod(g_{k-2}/g_{k-1}) \text{ para } k \geq 2 \end{cases}$$

em que *mod* denota o resto da divisão polinomial. Definimos então $\tilde{v}(\alpha)$ como sendo o número de variações de sinal em $g_i(\alpha)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Temos então que se $p(\alpha) \neq 0$ e $p(\beta) \neq 0$, o número de raízes de $p(x)$ no intervalo $[\alpha, \beta]$ é exatamente $\tilde{v}(\alpha) - \tilde{v}(\beta)$.

Raízes de Equações Polinomiais

EXEMPLO: $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= p(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\
g_1(x) &= p'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\
g_2(x) &= \tfrac{8}{9}x - \tfrac{10}{9} \text{ VER ABAIXO!} \\
g_3(x) &= \tfrac{-99}{16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 - x + 1 & 3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \\ \cline{1-1}
\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 & \\
-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{8}{9}x + \frac{10}{9} & \Rightarrow g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}.
\end{array}
$$

Raízes de Equações Polinomiais

Seja, por exemplo, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$:

$g_0(\alpha) = 11$; $g_1(\alpha) = 15$; $g_2(\alpha) = 2/3$; $g_3(\alpha) = -99/16 \Rightarrow \tilde{v}(\alpha) = 1$

$g_0(\beta) = 34$; $g_1(\beta) = 32$; $g_2(\beta) = 14/9$; $g_3(\beta) = -99/16 \Rightarrow \tilde{v}(\beta) = 1$

$\tilde{v}(\beta) - \tilde{v}(\alpha) = 1 - 1 = 0$

Portanto, $p(x)$ não possui raízes reais no intervalo $[2, 3]$.

Raízes de Equações Polinomiais

$p(x)$ possui ao menos um zero dentro do círculo com raio $\min(\rho_1, \rho_n)$ no plano complexo, sendo

$$\rho_1 = n\frac{|a_0|}{|a_1|} \text{ e } \rho_n = \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}$$

Além disso, se defirnirmos

$$r \approx 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|},$$

então todo zero complexo (e real) de $p(x)$ encontra-se na região circular definida por $|x| \leq r$.

Raízes de Equações Polinomiais

EXEMPLO: $p(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x^2 + 10.8x - 6.8$
$n = 5$; $a_0 = -6.8$; $a_1 = 10.8$; $a_n = a_5 = 1$
$\rho_1 = 5\frac{6.8}{10.8} = 3.14\ldots$
$\rho_n = \sqrt[5]{\frac{6.8}{1}} = 1.46\ldots$

Portanto $p(x)$ tem no mínimo uma raiz real ou complexa cujo módulo é $\leq 1.46\ldots$.

Já para r temos:
$r \approx 1 + \frac{|a_1|}{|a_5|} = 11.8$
e portanto se garante um limite superior tal que não existe nenhuma raiz real ou complexa com módulo > 11.8.

Raízes de Equações Polinomiais

Teorema de Cauchy para polinômios

Definam-se os seguintes polinômios:

$$P(x) = |a_n|x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - \cdots - |a_0|$$

e

$$Q(x) = |a_n|x^n + |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x - |a_0|$$

Pela regra de Descartes, $P(x)$ deve possuir exatamente um zero positivo R e $Q(x)$ um zero positivo r. Então todos os zeros de $p(x)$ residem no anel

$$r \leq |x| \leq R$$

Raízes de Equações Polinomiais

EXEMPLO: Considerando o polinômio já definido:

$$P(x) = x^5 - 3.7x^4 - 7.4x^3 - 10.8x^2 - 10.8x - 6.8$$
$$Q(x) = x^5 + 3.7x^4 + 7.4x^3 + 10.8x^2 + 10.8x - 6.8$$

Temos então que os zeros positivos são respectivamente $R = 5.6\ldots$ e $r = 0.63\ldots$. Assim, qualquer zero x de $p(x)$ satisfaz: $0.63\cdots < |x| < 5.6\ldots$

Raízes de Equações Polinomiais

O método de Newton pode ser aplicado a polinômios. Porém por eficiência computacional usaremos uma estratégia especial para avaliar o polinômio e sua derivada em cada iteração. Trata-se da forma dos parêntesis encaixados que já vimos. Ex.: $p(x) = (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$
Calculando para $x = z$:

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 \\ b_3 &= a_3 + b_4z \\ b_2 &= a_2 + b_3z \\ b_1 &= a_1 + b_2z \\ b_0 &= a_0 + b_1z \end{aligned}$$

e temos então $p(z) = b_0$. Em geral para um polinômio de grau n e para $j = n, n-1, \dots, 1, 0$ definimos

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_j &= a_j + b_{j+1}z \text{ para } j = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \end{aligned}$$

e então b_0 será exatamente o valor de $p(z)$.

Raízes de Equações Polinomiais

De modo similar, pode-se avaliar a derivada:

$$p'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Quero escrever os coeficientes da derivada em função dos b_j's que já tenho. Para isso, primeiramente eu escrevo os a_j's em função dos b_j's:

$$\begin{aligned}
b_4 &= a_4 \Rightarrow a_4 = b_4 \\
b_3 &= a_3 + b_4z \Rightarrow a_3 = b_3 - b_4z \\
b_2 &= a_2 + b_3z \Rightarrow a_2 = b_2 - b_3z \\
b_1 &= a_1 + b_2z \Rightarrow a_1 = b_1 - b_2z \\
b_0 &= a_0 + b_1z \Rightarrow a_0 = b_0 - b_1z
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão de $p'(z)$:

$$\begin{aligned}
p'(z) &= 4b_4z^3 + 3(b_3 - b_4z)z^2 + 2(b_2 - b_3z)z + (b_1 - b_2z) \\
&= 4b_4z^3 + 3b_3z^2 - 3b_4z^3 + 2b_2z - 2b_3z^2 + b_1 - b_2z \\
&= b_4z^3 + b_3z^2 + b_2z + b_1
\end{aligned}$$

Raízes de Equações Polinomiais

Obtemos assim para a derivada um polinômio com grau $n-1$ e cujos coeficientes são os b_j's já obtidos e para o qual o algoritmo dos parêntesis encaixados pode ser novamente aplicado tal que em geral:

$$
\begin{aligned}
c_n &= b_n \\
c_j &= b_j + c_{j+1}z \text{ para } j = n-1, n-2, \ldots, 1
\end{aligned}
$$

e então c_1 será o valor de $p'(z)$.

Substituindo no método de Newton, obtemos o algoritmo a seguir.

Raízes de Equações Polinomiais

Método de Newton para Raízes Reais de Polinômios

Partindo de um ponto inicial x_0:

Algoritmo 6: Método de Newton para Raízes de Polinômios

para $m = 0$ **até** *desejado* **hacer**
    $z \leftarrow x_m$, $b_n \leftarrow a_n$, $c_n \leftarrow b_n$;
    para $k = n - 1$ **até** 1 **hacer**
        $b_k \leftarrow a_k + zb_{k+1}$;
        $c_k \leftarrow b_k + zc_{k+1}$;
    fin
    $b_0 \leftarrow a_0 + zb_1$;
    $x_{m+1} \leftarrow x_m - b_0/c_1$;
fin

Raízes de Equações Polinomiais

EXEMPLO: $x^3 - 3x + 3$, $x_0 = -2$

$m = 0$

$z = x_0 = -2;\ b_3 = a_3 = 1;\ c_3 = b_3 = 1$

$k = 2$

$b_2 = a_2 + zb_3 = 0 + (-2) * 1 = -2$

$c_2 = b_2 + zc_3 = -2 + (-2) * 1 = -4$

$k = 1$

$b_1 = a_1 + zb_2 = -3 + (-2) * (-2) = 1$

$c_1 = b_1 + zc_2 = 1 + (-2) * (-4) = 9$

$b_0 = a_0 + zb_1 = 3 + (-2) * 1 = 1$

$x_1 = x_0 - b_0/c_1 = -2 - 1/9 = -2.111$

Raízes de Equações Polinomiais

$m = 1$

$z = x_1 = -2.111;\ b_3 = a_3 = 1;\ c_3 = b_3 = 1$

$k = 2$

$b_2 = a_2 + zb_3 = 0 + (-2.111) * 1 = -2.111$

$c_2 = b_2 + zc_3 = -2.111 + (-2.111) * 1 = -4.222$

$k = 1$

$b_1 = a_1 + zb_2 = -3 + (-2.111) * (-2.111) = 1.456$

$c_1 = b_1 + zc_2 = 1.456 + (-2.111) * (-4.222) = 10.369$

$b_0 = a_0 + zb_1 = 3 + (-2.111) * 1.456 = -0.074$

$x_2 = x_1 - b_0/c_1 = -2.111 - (-0.074)/10.369 = -2.104$