

# Os Axiomas de Euclides

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

# Os Axiomas de Euclides

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

**Axioma I:** Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

# Os Axiomas de Euclides

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

**Axioma I:** Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

**Axioma II:** Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

# Os Axiomas de Euclides

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

**Axioma I:** Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

**Axioma II:** Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

**Axioma III:** Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

# Os Axiomas de Euclides

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

**Axioma I:** Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

**Axioma II:** Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

**Axioma III:** Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

**Axioma IV:** Todos os ângulos retos são iguais.

# Os Axiomas de Euclides

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

**Axioma I:** Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

**Axioma II:** Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

**Axioma III:** Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

**Axioma IV:** Todos os ângulos retos são iguais.

**Axioma V:** Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

# Equivalentes do 5º postulado

- (Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.

# Equivalentes do 5º postulado

- (Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.



# Equivalentes do 5º postulado

- (Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por eles.

# Equivalentes do 5º postulado

- (Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por eles.
- (Pitágoras): Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

# Equivalentes do 5º postulado

- (Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por eles.
- (Pitágoras): Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- Todo ângulo inscrito em um semicírculo é reto.

# Equivalentes do 5º postulado

- (Playfair): Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por eles.
- (Pitágoras): Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- Todo ângulo inscrito em um semicírculo é reto.
- Quaisquer duas retas paralelas possuem uma perpendicular em comum.

# Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência da geometria euclidiana são os seguintes:

# Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência da geometria euclidiana são os seguintes:

**Axioma I:** Dois pontos distintos determinam uma única reta.

# Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência da geometria euclidiana são os seguintes:

**Axioma I:** Dois pontos distintos determinam uma única reta.

**Axioma II:** Toda reta possui pelo menos dois pontos.

# Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência da geometria euclidiana são os seguintes:

**Axioma I:** Dois pontos distintos determinam uma única reta.

**Axioma II:** Toda reta possui pelo menos dois pontos.

**Axioma III:** Existem três pontos que não pertencem a mesma reta.



# Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência da geometria euclideana são os seguintes:

**Axioma I:** Dois pontos distintos determinam uma única reta.

**Axioma II:** Toda reta possui pelo menos dois pontos.

**Axioma III:** Existem três pontos que não pertencem a mesma reta.

**Axioma IV:** (Playfair) Dado um ponto  $A$  não incidente a uma reta  $r$ , existe no máximo uma reta  $s$  que é incidente a  $A$  e não intersecta  $r$ .

**Definição:** Duas retas são ditas paralelas se a sua interseção for vazia.

# Geometrias não-euclidianas

A geometria não-euclidiana surge pela negação do Axioma IV. Existem duas possibilidades:

# Geometrias não-euclidianas

A geometria não-euclidiana surge pela negação do Axioma IV. Existem duas possibilidades:

**Não existem retas paralelas!**

# Geometrias não-euclidianas

A geometria não-euclidiana surge pela negação do Axioma IV. Existem duas possibilidades:

**Não existem retas paralelas!**

⇒ Geometria Projetiva, Geometria Elíptica.

# Geometrias não-euclidianas

A geometria não-euclidiana surge pela negação do Axioma IV. Existem duas possibilidades:

**Não existem retas paralelas!**

⇒ Geometria Projetiva, Geometria Elíptica.

**Dado um ponto  $A$  não incidente a uma reta  $r$ , existem pelo menos duas retas incidentes a  $A$  e paralelas a  $r$ !**

# Geometrias não-euclidianas

A geometria não-euclidiana surge pela negação do Axioma IV. Existem duas possibilidades:

**Não existem retas paralelas!**

⇒ Geometria Projetiva, Geometria Elíptica.

**Dado um ponto  $A$  não incidente a uma reta  $r$ , existem pelo menos duas retas incidentes a  $A$  e paralelas a  $r$ !**

⇒ Geometria Hiperbólica!

# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)

# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)
- K. F. Gauss (1777-1855)



# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)
- K. F. Gauss (1777-1855)
- J. Bolyai (1832)

# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)
- K. F. Gauss (1777-1855)
- J. Bolyai (1832)
- N. I. Lobatchevsky (1829)

# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)
- K. F. Gauss (1777-1855)
- J. Bolyai (1832)
- N. I. Lobatchevsky (1829)
- E. Beltrami (1868)

# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)
- K. F. Gauss (1777-1855)
- J. Bolyai (1832)
- N. I. Lobatchevsky (1829)
- E. Beltrami (1868)
- B. Riemann (1854)

# História geometria hiperbólica

- G. Saccheri (1733)
- K. F. Gauss (1777-1855)
- J. Bolyai (1832)
- N. I. Lobatchevsky (1829)
- E. Beltrami (1868)
- B. Riemann (1854)
- A. Einstein (1915)

# Modelos

- Modelo de Klein
- Modelo de Poincaré no disco
- Modelo de Poincaré no semi-plano
- Modelo de Lorentz (hiperbolóide)