Gabarito da 3ª Prova de MA-111 – 2º Semestre de 2005 – Turmas X e Y

Q1. (15 pontos) Há (pelo menos) duas respostas para esta pergunta: (a) o sólido de revolução obtido girando a região $\mathfrak{R}$ ao redor do eixo y, onde $\mathfrak{R}$ é a região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $x = 9$ e $y = 0$; (b) o sólido de revolução obtido girando a região limitada pelas curvas $y = \sqrt{2}x^{3/4}$, $x = 9$ ao redor do eixo x.

Q2. (15 pontos) Método das cascas cilíndricas:

$$\int_0^2 2\pi(2-x)(8-x^3)\,dx.$$

Método das arruelas:

$$\int_0^8 (4\pi - \pi(2-y^{1/3})^2)\,dy = \int_0^* \pi(4y^{1/3} - y^{2/3})\,dy.$$

Q3. (20 pontos) Considere uma seção transversal paralela típica, e sejam $P1$ e $P2$ os pontos de interseção desta seção transversal com a base. Se a base é representada pelo disco $x^2 + y^2 = 9$ então os pontos $P1$ e $P2$ terão coordenadas $(x, -\sqrt{9-x^2})$ e $(x, \sqrt{9-x^2})$, para $-3 \le x \le 3$. A altura do triãgulo desta seção transversal será $h = y(x) = \sqrt{9-x^2}$, logo a área deste triãgulo será $2y(x)\cdot y(x)/2 = y^2(x) = 9 - x^2$. O volume infinitesimal será portanto $(9-x^2)\,dx$ e o volume será

$$\int_{-3}^3 (9-x^2)\,dx = 36.$$

Q4. (20 pontos) (i) Pelo Teste da Comparação, a primeira integral é divergente pois o integrando é maior do que $(2x)^{-1}$, cuja integral é divergente. Este resultado também pode ser obtido fazendo a substituição $u = x^4 + 1$. (ii) A segunda integral é convergente, o que pode ser visto fazendo a substituição $u = y - 2$:

$$\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy = \int_0^4 \frac{u+2}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^4 \sqrt{u}\,du + \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{u}}\,du.$$

Q5. (30 pontos) (i) Temos:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \int \ln u\,du =$$

$$= -\int u\frac{1}{u}\,du + u\ln u + C = u(\ln u - 1) + C.$$

(ii) Calculemos:

$$\int e^x \sin x\,dx = -\int e^x(-\cos x)\,dx - e^x\cos x + C =$$

$$-\int e^x(\sin x)\,dx + e^x\sin x - e^x\cos x + C,$$

logo,

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + C,$$

ou seja,

$$inte^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + C.$$

(iii) Temos:

$$\int \frac{8x^2 - x + 5}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{5}{x} + \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{5}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 5\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C.$$