

Q1. (30 pontos) Calculemos os limites abaixo:

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+100} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+100}) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+100})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+100}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-100}{\sqrt{x} + \sqrt{x+100}} = 0; \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)(\tan x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{\cos x} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1;$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Q2. (20 pontos) Precisamos mostrar que os gráficos de  $f(x) = \log_2 x$  e de  $g(x) = 2^{-x}$  se interceptam no intervalo  $[1, 2]$ . Considere a função  $h = h(x) = f(x) - g(x)$ . Então vemos que

$$h(1) = f(1) - g(1) = \log_2 1 - 2^{-1} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0, \text{ e}$$

$$h(2) = f(2) - g(2) = \log_2 2 - 2^{-2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

Como  $f$  e  $g$  são funções contínuas segue-se que  $h$  também é contínua.

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) garante que, se  $h$  for contínua e assumir os valores  $L$  e  $M$  nos extremos de um intervalo  $[a, b]$  então a função  $h$ , restrita a  $[a, b]$ , assumirá todos os valores entre  $L$  e  $M$ . Tomando-se  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $L = -1/2$  e  $M = 3/4$  acima e aplicando-se o TVI vê-se que  $h$  assumirá o valor 0 pois  $L < 0 < M$ . Dito de outro modo, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h(c) = 0$ , ou seja,  $f(c) = g(c)$ . Assim, os gráficos de  $f$  e de  $g$  se interceptam em  $x = c$ , pois  $(c, f(c)) = (c, g(c))$ .

Q3. (20 pontos) Encontremos primeiro a equação da reta  $s$ , tangente ao gráfico de  $y = f(x) = 6x^3 - 8x + e^x + 1$  em  $(0, 2)$ . Temos que o coeficiente angular desta reta é  $f'(0)$ , onde  $f'(x) = 18x^2 - 8 + e^x$ . Assim,  $f'(0) = 0 - 8 + 1 = -7$ . A equação de  $s$  é portanto

$$s : y - 2 = -7x.$$

O coeficiente angular de  $r$  deve ser, necessariamente,  $1/7$  pois  $r$  e  $s$  são perpendiculares. Como  $r$  tem que passar por  $(3, 1)$  obtemos a equação de  $r$ :

$$r : y - 1 = \frac{1}{7}(x - 3),$$

ou seja

$$r : y = \frac{x+4}{7}.$$

Q4. (30 pontos) Calcule:

(a)

$$f'(x), \text{ se } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

Temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

(b)

$$f'(x), \text{ se } f(x) = \left[1 + x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]^7.$$

Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 \left[1 + x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 \left(2x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ &= 7 \left[1 + x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]^6 \left(2x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

(c)

$$f'(1), \text{ se } f(x) = g(x^3) \text{ e se } g'(1) = 7.$$

Temos:

$$f'(x) = g'(x^3) \cdot 3x^2,$$

logo

$$f'(1) = g'(1) \cdot 3 = 21.$$