

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

## Exemplo

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um componente mecânico. Cada peça é composta de duas partes,  $A$  e  $B$ , cada uma com uma chance específica de ser defeituosa. Só é possível verificar a qualidade das peças depois que elas são montadas.

Se ambas são defeituosas, a peça é descartada e dá um prejuízo de \$5. Se a peça  $B$  é defeituosa, ainda é possível reparar a peça e obter um lucro de \$5. De maneira semelhante, se  $A$  é defeituosa, o reparo permite vender a peça inteira com um lucro de \$10. Se as duas peças são boas, o lucro é de \$15.

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

## Exemplo

À cada uma das configurações está associada uma probabilidade:

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= 0,56, & P(A^c \cap B) &= 0,23 \\P(A \cap B^c) &= 0,02, & P(A^c \cap B^c) &= 0,19\end{aligned}$$

Qual o lucro por peça produzida esperado? Qual a variância?  
Como mais podemos descrever a distribuição do lucro? *Adaptado de: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 129.*

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

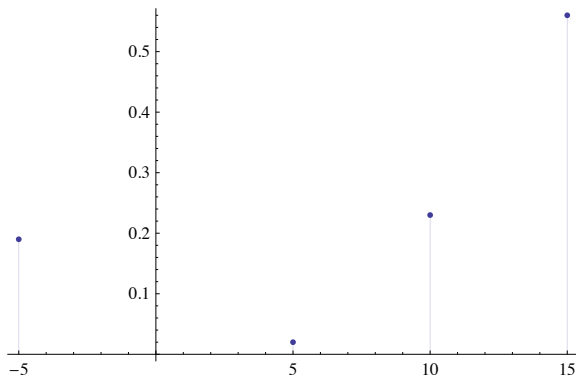


Figura: Função de probabilidade para a variável aleatória  $X$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Suponha que o empresário faça a seguinte pergunta: “Qual o lucro médio por conjunto montado que espero conseguir?”.

A definição de valor médio, ou esperança matemática, da variável aleatória  $X$  que assume valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Para saber o lucro médio do empresário, basta aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 15 * P(X = 15) + 10 * P(X = 10) \\ &\quad + 5 * P(X = 5) - 5 * P(X = -5) \\ &= 15 * 0,56 + 10 * 0,23 + 5 * 0,02 - 5 * 0,19 = 9,85\end{aligned}$$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Chamamos *Variância* da variável aleatória  $X$  o valor.

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 P(X = x_i)$$

E o desvio-padrão de  $X$ ,  $\text{DP}(X)$ , é a raiz quadrada da variância.

No caso do empresário, temos  $\text{Var}(X) = 57,23$  e  $\text{DP}(X) = 7,57$ .

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Dada a variável aleatória  $X$ , chamaremos de função de distribuição acumulada (f.d.a)  $F(x)$  à função

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Observe que o domínio de  $F$  é o conjunto dos números reais, ao passo que o contradomínio é o intervalo  $[0, 1]$ .

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

No problema do empresário, usando a função de probabilidade obtida anteriormente, obtemos a f.d.a de X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -5 \\ 0,19 & \text{se } -5 \leq x < 5 \\ 0,21 & \text{se } 5 \leq x < 10 \\ 0,44 & \text{se } 10 \leq x < 15 \\ 1 & \text{se } x \geq 15 \end{cases}$$



# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

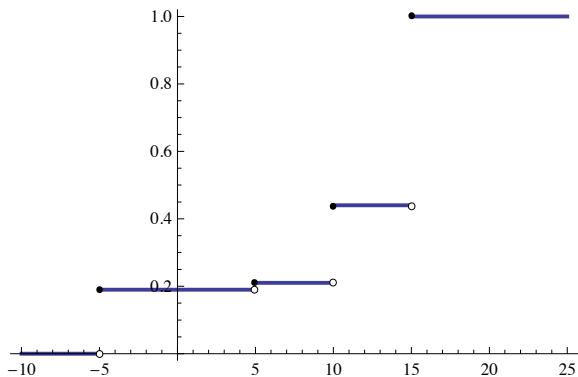


Figura: F.d.a. para a variável aleatória  $X$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Podemos considerar outras medidas de localização além da média para a variável aleatória  $X$ .

- A *mediana* de  $X$  é o valor de  $X$  que acumula 0,50 de probabilidade. Observe que  $F(x)$  em -5 é 0,19; em 5, é 0,21; e em 10, é 0,44.  $F(x)$  acumula 0,50 portanto em 15, e  $\text{Mediana}(X) = 15$ .
- A *moda* de  $X$  é o valor mais provável; no caso,  $P(X = 15) = 0,56$ , portanto  $\text{Moda}(X) = 15$ .

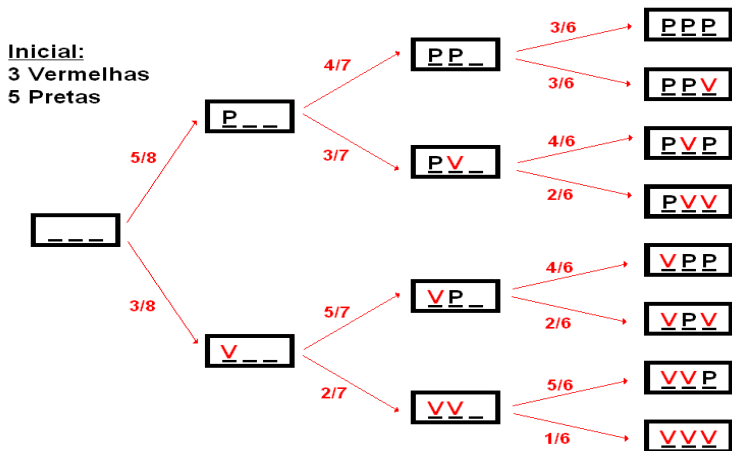
# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

## Exemplo

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória  $X$  igual ao número de bolas pretas. Obtenha a distribuição de  $X$ .  
*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 135.*

Repare que não há reposição: a primeira extração tem 5 possibilidades em 8 de ser uma bola preta; mas, a segunda terá 5 em 7 se a primeira for vermelha, ou 4 em 7 se a primeira foi preta, e assim por diante.

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância



# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

A partir do gráfico, podemos construir uma tabela com os eventos  $PPP$ ,  $PPV$ , etc.

| Extrações | Probabilidade            |
|-----------|--------------------------|
| PPP       | $5/8 * 4/7 * 3/6 = 5/28$ |
| PPV       | $5/8 * 4/7 * 3/6 = 5/28$ |
| PVP       | $5/8 * 3/7 * 4/6 = 5/28$ |
| VPP       | $3/8 * 5/7 * 4/6 = 5/28$ |
| PVV       | $5/8 * 3/7 * 2/6 = 5/56$ |
| VPV       | $3/8 * 5/7 * 2/6 = 5/56$ |
| VVP       | $3/8 * 2/7 * 5/6 = 5/56$ |
| VVV       | $3/8 * 2/7 * 1/6 = 1/56$ |

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Finalmente, observe que são equivalentes os eventos:

$$\begin{aligned}\{X = 0\} &= \{VVV\} \\ \{X = 1\} &= \{VVP\} \cup \{VPV\} \cup \{PVV\} \\ \{X = 2\} &= \{PPV\} \cup \{PVP\} \cup \{VPP\} \\ \{X = 3\} &= \{PPP\}\end{aligned}$$

Somando as probabilidades dos eventos, encontradas anteriormente, obtemos a função de distribuição de  $X$ :

| $x$      | 0    | 1    | 2    | 3    |
|----------|------|------|------|------|
| $p_X(x)$ | 0,02 | 0,27 | 0,53 | 0,18 |

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Podemos calcular a esperança de  $X$  a partir de sua função de probabilidade:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^4 x * p_X(x) = 0,27 + 0,53 * 2 + 0,18 * 3 = 1,87$$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

## Exemplo

O tempo  $T$ , em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

|        |     |     |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $t$    | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
| $p(t)$ | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

- Calcule o tempo médio de processamento.
- Cada peça processada paga ao operador \$2,00 mas, se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha \$0,50 por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, ganha um bônus de \$1,00. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a.  $G$ : quantia paga por peça.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 140.



# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

$$(a) \mathbb{E}(T) = \sum_{t=2}^7 tP(T = t) = 2 * 0,1 + 3 * 0,1 + 4 * 0,3 + 5 * 0,2 \\ + 6 * 0,2 + 7 * 0,1 = 4,6$$

- (b) Podemos trocar os valores na tabela do tempo, pelo total ganho por peça; note, contudo, que o operário receberá \$2,00 no evento  $\{T = 6\} \cup \{T = 7\}$ , logo somamos suas probabilidades. Seja  $S$  a v.a. “ganho final”.

|      |         |         |         |         |         |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| s    | \$ 4,00 | \$ 3,50 | \$ 3,00 | \$ 2,50 | \$ 2,00 |
| p(s) | 0,1     | 0,1     | 0,3     | 0,2     | 0,3     |

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

Obtemos a média e a variância de  $S$  através da definição:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_s sP(S=s) = 4 \cdot 0,1 + 3,5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 + 2,5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 = 2,75$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2) &= \sum_s s^2 P(S=s) = 16 \cdot 0,1 + 12,25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,3 + 6,25 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 = \\ &= 7,975\end{aligned}$$

$$\text{Var}(S) = 7,975 - (2,75)^2 = 0,4125$$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

## Exemplo (cont.)

Obtenha a função de distribuição acumulada da v.a.  $T$ .

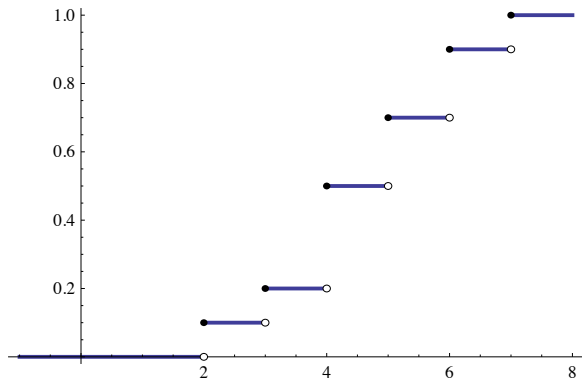
*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 140.*

A função é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 0,1 & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ 0,2 & \text{se } 3 \leq t < 4 \\ 0,5 & \text{se } 4 \leq t < 5 \\ 0,7 & \text{se } 5 \leq t < 6 \\ 0,9 & \text{se } 6 \leq t < 7 \\ 1 & \text{se } t \geq 7 \end{cases}$$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Esperança e Variância

O gráfico da função acumulada é dado por:



# Variáveis Aleatórias Discretas - Distribuição de Bernoulli

## Exemplo

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

Se  $X$  denotar a variável “número de tubos defeituosos em 10 extrações independentes e aleatórias”, qual o seu valor esperado? Qual a variância?

## Variáveis Aleatórias Discretas - Distribuição de Bernoulli

Note que a variável aleatória  $X =$  número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0,2$ . Portanto, “não mais do que dois tubos defeituosos” é o evento  $\{X \leq 2\}$ . Sabemos que, para  $X \sim b(10, 0,2)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} 0,2^x (1 - 0,2)^{10-x}$$

e que

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &(1 - 0,2)^{10} + 10 \times 0,2(1 - 0,2)^9 + 45 \times 0,2^2(1 - 0,2)^8 = 0,6778 \end{aligned}$$

# Variáveis Aleatórias Discretas - Distribuição de Bernoulli

Se  $X \sim b(n, p)$ , então

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Basta então aplicar os valores fornecidos para vermos que o número esperado de tubos defeituosos num experimento com 10 extrações é de 2, e que a variância é de 1,6.

# Variáveis Aleatórias Discretas - Distribuição de Bernoulli

## Exemplo (cont.)

Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça?

A probabilidade é dada por

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,879 = 0,121.$$