UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

LINO RAMADA FERREIRA JUNIOR

Formalismo termodinâmico em temperatura zero para *subshifts* de tipo finito aleatórios

Campinas

2020

Lino Ramada Ferreira Junior

Formalismo termodinâmico em temperatura zero para *subshifts* de tipo finito aleatórios

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Eduardo Garibaldi

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Lino Ramada Ferreira Junior e orientada pelo Prof. Dr. Eduardo Garibaldi.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

F413f

Ferreira Junior, Lino Ramada, 1991-
Formalismo termodinâmico em temperatura zero para *subshifts* de tipo finito aleatórios / Lino Ramada Ferreira Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Eduardo Garibaldi.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores aleatórios. 2. Otimização ergódica. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Variáveis aleatórias. 5. Teoria ergódica. I. Garibaldi, Eduardo, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Thermodynamic formalism at zero temperature for random subshift of finite type
Palavras-chave em inglês:
Random operators
Ergodic optimization
Dynamical systems
Random variables
Ergodic theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Eduardo Garibaldi [Orientador]
José Régis Azevedo Varão Filho
Manuel Stadlbauer
Philippe Paul Thieullen
Samuel Paul Léon Petite
Data de defesa: 22-12-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-9472-9692
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0446695479203182

Tese de Doutorado defendida em 22 de dezembro de 2020 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). MANUEL STADLBAUER

Prof(a). Dr(a). PHILIPPE PAUL THIEULLEN

Prof(a). Dr(a). SAMUEL PAUL LÉON PETITE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

À minha esposa Grazi e meus filhos, Miguel e Arthur.
Por serem meu porto seguro, minha motivação e alegria!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao professor Eduardo, pelos ensinamentos e orientações, por todo empenho empregado na pesquisa e por ter me proporcionado amadurecimento como matemático.

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), a qual me concedeu o auxílio financeiro pela concessão de bolsa de doutorado através do processo nº 2014/23773-8.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço também à Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que disponibilizou a infraestrutura necessária para o desenvolvimento do projeto, além dos ótimos cursos de graduação, mestrado e doutorado.

Agradeço ainda a todos os professores da UNICAMP que, durante aulas, seminários ou conversas, contribuíram para minha formação ao compartilharam seus conhecimentos.

Agradeço muito a minha família e meus amigos, que sempre me proporcionaram muito carinho e apoio.

Finalmente, tenho muito a agradecer à minha esposa Grazi, que me suportou todos esses anos de trabalho, com muito amor e companheirismo. Uma mulher fantástica que me enche de orgulho em diversos aspectos e que me proporcionou uma família maravilhosa, com dois filhos lindos, Miguel e Arthur.

Resumo

Esta tese destina-se ao estudo do formalismo termodinâmico em temperatura zero no contexto de um *subshift* de tipo finito aleatório. Usamos resultados da literatura que (sob algumas hipóteses) garantem a existência de estados de equilíbrio μ_t para potenciais aleatórios suficientemente regulares $t\phi$, onde o parâmetro t é interpretado como o inverso da temperatura absoluta. A partir do formalismo termodinâmico em temperatura zero caracterizamos a constante ergódica maximal do potencial aleatório ϕ de diferentes maneiras e obtemos probabilidade maximizante. Fornecemos contribuição para a teoria de otimização ergódica ao generalizar o conceito de subação para sistemas dinâmicos aleatórios e demonstramos que potenciais aleatórios suficientemente regulares admitem subações calibradas.

Palavras-chave: Formalismo termodinâmico; Operador de transferência aleatório; *Subshift* de tipo finito aleatório; Subação aleatória; Constante ergódica maximal.

Abstract

The goal of this thesis is to study the thermodynamic formalism at zero temperature in the context of a random subshift of finite type. We make use of results from the literature that (under some hypotheses) guarantee the existence of equilibrium states μ_t for sufficiently regular random potentials $t\phi$, where the parameter t is interpreted as the inverse of the absolute temperature. From the thermodynamic formalism at zero temperature we characterize the maximal ergodic value of the random potential ϕ in different ways and we obtain maximizing probabilities. We provide a contribution to the theory of ergodic optimization by generalizing the concept of subaction to random dynamical systems and by showing that sufficiently regular random potentials admit calibrated subations.

Keywords: Thermodynamic formalism; Random transfer operator; Random subshift of finite type; Random sub-action; Maximal ergodic value.

Sumário

Introdução

Na presente tese de doutorado, trabalhamos com uma versão aleatória de dinâmica do tipo *shift*, denominada *subshift* de tipo finito aleatório (STFA). Consideramos como base de resultados para este modelo de dinâmica a referência [BG95] e importantes generalizações que se encontram em [KL06, Gu97, DKS08, MSU10, St10].

Seguiremos a vertente do formalismo termodinâmico que teve êxito em obter resultados relevantes de mecânica estatística sobre o modelo do STFA. A principal ferramenta nesse contexto é o operador de transferência, utilizado para entender propriedades dos estados de equilíbrio (quando existentes) associados a potenciais suficientemente regulares, ou seja, as medidas de probabilidade tais que a entropia métrica quando somada com a integral de um potencial fornece a pressão deste potencial.

O foco do nosso trabalho é obter resultados de otimização ergódica sobre o modelo do STFA, ou melhor, estudar probabilidades que maximizam a integral de um potencial, bem como caracterizar o valor maximal destas integrais. Tal estudo será realizado via abordagem do formalismo termodinâmico em temperatura zero, que consiste em multiplicar um potencial ϕ por parâmetro $t > 0$, interpretado como inverso da temperatura, e observar o comportamento da pressão e dos estados de equilíbrio de $t\phi$ quando $t \to \infty$, como feito, por exemplo, em [Sa99, CLT01] para um sistema dinâmico topológico (SDT).

O STFA é um sistema dinâmico do tipo fibrado. Mais precisamente, temos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ como base e, para cada $\omega \in \Omega$, $\Sigma(\omega)$ é um subconjunto compacto de um espaço de sequências X, representando a fibra sobre o ponto ω. Para que não existam múltiplas pré-imagens de cada ponto $\omega \in \Omega$ e também não haja uma decomposição da base em subconjuntos invariantes, temos $\theta \colon \Omega \to \Omega$ uma transformação $\mathbb{P}$-ergódica, inversível e bimensurável. Já o deslocamento entre as fibras é dado por uma transformação de *shift* nas sequências

$$\sigma \colon \Sigma(\omega) \to \Sigma(\theta(\omega))$$
$$x = (x_0 x_1 x_2 \ldots) \mapsto \sigma x = (x_1 x_2 \ldots),$$

Temos assim uma dinâmica do tipo *skew-product*, dada por

$$\begin{aligned} \Theta\colon \Sigma &\to \Sigma \\ (\omega, x) &\mapsto (\theta\omega, \sigma x), \end{aligned}$$

onde $\Sigma := \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid x \in \Sigma(\omega)\}$. Por questões técnicas, como decomposição das medidas em Σ e separabilidade do espaço de funções contínuas sobre Σ, assumimos no texto que a σ-álgebra $\mathcal{F}$ em Ω é enumeravelmente gerada.

Tratando-se de uma dinâmica do tipo fibrado, estamos interessados em probabilidades sobre Σ que são invariantes pela dinâmica Θ e que contenham toda a informação de $\mathbb{P}$. Em termos mais claros, focaremos em probabilidades que possuem $\mathbb{P}$ como marginal em Ω, admitindo, portanto, desintegração $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, onde μ_ω é probabilidade sobre $\Sigma(\omega)$, e verificam a igualdade $\mu_{\theta\omega} = \sigma_*\mu_\omega$. Denotamos o conjunto de tais medidas de probabilidade por $\mathcal{M}_\mathbb{P}(\Sigma)$.

Além disso, os potenciais aleatórios ϕ considerados são constituídos por famílias de funções contínuas $\{\phi(\omega, \cdot)\colon \Sigma(\omega) \to \mathbb{R}\}_{\omega\in\Omega}$, que possuem regularidade localmente holderiana nas fibras e norma do supremo sobre as fibras integrável com respeito à $\mathbb{P}$.

Para esta classe de potenciais, obtivemos diferentes caracterizações da constante ergódica maximal, ou seja, o valor máximo da integral de um potencial com respeito a probabilidades em $\mathcal{M}_\mathbb{P}(\Sigma)$. As apresentações alternativas são feitas via médias de Birkhoff e Teorema de dualidade, generalizando resultados bem conhecidos da literatura de otimização ergódica no contexto de SDTs, cujos enunciados podem ser consultados, por exemplo, nos Teoremas 2.1 e 2.2 de [CG93] e na Proposição 2.1 de [Je06].

No contexto determinístico, a soma do potencial com cobordo dinâmico definido a partir de uma subação está sempre limitada pela constante ergódica maximal deste potencial. Deste modo, as subações agem como funções corretoras, permitindo evidenciar o local geométrico do suporte das probabilidades maximizantes, isto é, as probabilidades cuja integral realizam a constante ergódica maximal. Há ainda um subconjunto especial de subações, chamadas de calibradas. Subações calibradas aparecem em diversos contextos, como, por exemplo, na resolução de problemas de minimização de energia em mecânica estatística [FG89, Nu91] ou então como soluções de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi [Fa97, Co01].

Fornecemos neste trabalho contribuição para a teoria de otimização ergódica ao generalizar o conceito de subação para sistemas dinâmicos aleatórios (SDAs). Mais ainda, obtivemos resultado original nessa linha de pesquisa ao demonstrar a existência de subações calibradas para potenciais aleatórios localmente holderianos no contexto de um STFA.

Teorema 0.1. *Para um STFA topologicamente mixing, todo potencial aleatório holderiano nas fibras que verifica hipóteses de integrabilidade e oscilação controlada admite subação aleatória calibrada.*

Com respeito à estrutura da tese, a fim de fornecer uma boa compreensão do texto ao leitor, destinamos a seção inicial do primeiro capítulo para as definições básicas dos sistemas dinâmicos aleatórios, os resultados preliminares que utilizaremos no decorrer do texto e as dificuldades técnicas encontradas ao se desenvolver novas teorias nesse contexto.

Deixamos para a segunda seção uma revisão da literatura relacionada ao formalismo termodinâmico sobre um *subshift* de tipo finito aleatório. A principal ferramenta da teoria é o operador de transferência

$$(\mathcal{L}_\phi(\omega)f)(\theta\omega, x) = \sum_{\sigma y = x, y\in\Sigma(\omega)} \mathrm{e}^{\phi(\omega,y)} f(\omega, y), \quad \forall f \in C(\Sigma(\omega)).$$

Empregamos fundamentalmente o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, presente nas referências [BG95, KL06, DKS08, MSU10], o qual, em linhas gerais, permite associar ao potencial aleatório ϕ uma tripla (λ, h, ν), onde λ é uma variável aleatória positiva, h é autofunção positiva do operador de transferência $\mathcal{L}_\phi$ e ν automedida do operador dual $\mathcal{L}_\phi^*$, ambas associadas ao autovalor λ, sendo que $\mu = h\nu$ é probabilidade invariante pela dinâmica.

Em [DKS08] encontramos uma versão aleatória do Princípio Variacional, a qual relaciona a pressão de Gurevich de ϕ com o autovalor λ, a saber,

$$\Pi_G(\phi) = \int_\Omega \log\lambda \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Por outro lado, ao considerar o conjunto de fibras mergulhado em um mesmo espaço métrico compacto, as referências [Gu95, KL06] provam que a probabilidade $\mu = h\nu$ é estado de equilíbrio para o potencial aleatório ϕ:

$$h_\mu^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, \mathrm{d}\mu = \max_{m\in\mathcal{M}_\mathbb{P}(\Sigma)} \Big[h_m^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, \mathrm{d}m \Big].$$

No segundo capítulo, consideraremos o processo de congelamento do sistema, assim como feito em [Sa99, CLT01]. Examinaremos, para cada parâmetro $t > 0$, a tripla (λ_t, h_t, ν_t), associada ao potencial $t\phi$. O objetivo é estudar o comportamento assintótico de $\frac{1}{t}\log\lambda$, $\frac{1}{t}\log h_t$ e $\mu_t = h_t\nu_t$.

Mostramos que, similarmente aos sistemas dinâmicos topológicos, a constante ergódica maximal de ϕ,

$$\beta(\phi) := \sup_{m\in\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \int_\Sigma \phi\,\mathrm{d}m,$$

está associada ao autovalor λ_t via o limite válido para quase todo $\omega\in\Omega$:

$$\beta(\phi) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_\Omega \log\lambda_t\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \inf_t \frac{1}{t}\int_\Omega \log\lambda_t\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Caracterizamos a constante ergódica maximal de ϕ através de médias de Birkhoff como em [CG93], obtendo que, $\mathbb{P}$-q.t.p.,

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in\Sigma(\omega)}\frac{1}{n}S_n\phi(\omega,x) = \beta(\phi),$$

e estendemos o Teorema de dualidade de [CG93] para potenciais holderianos no contexto do STFA, mostrando que

$$\beta(\phi) = \inf_{v\in C(\Sigma)}\int_\Omega \sup_{x\in\Sigma(\omega)}\left[\phi(\omega,x)+v(\theta\omega,\sigma x)-v(\omega,x)\right]\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Obtemos ainda que, ao impor hipóteses de integrabilidade, está bem definido como um limite em quase todo ponto a variável aleatória

$$\Lambda_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\lambda_t(\omega)$$

e que esta satisfaz

$$\int_\Omega \Lambda_\infty\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \beta(\phi).$$

Provamos também que pontos de acumulação da família $\{\mu_t = h_t\nu_t\}_t$, quando $t\to\infty$, são probabilidades maximizantes para ϕ e de entropia máxima dentre as maximizantes, bem como ocorre no caso determinístico (ver, por exemplo, [CLT01, Proposição 29]).

Definimos então uma generalização do conceito de subação para o *subshift* de tipo finito aleatório. Dizemos que uma função aleatória u, contínua sobre as fibras, é uma subação aleatória para o potencial aleatório ϕ se, para quase todo ω, há uma variável aleatória ψ, com $\int_\Omega \psi \, d\mathbb{P} = \beta(\phi)$ tal que, para todo $x \in \Sigma(\omega)$, vale a desigualdade cohomológica

$$\phi(\omega, x) + u(\theta\omega, \sigma x) - u(\omega, x) \leqslant \psi(\omega).$$

Demonstramos que, no caso em que $\mathbb{P}$ dá massa para apenas uma órbita, o comportamento do STFA aleatório é muito similar ao do caso determinístico. Ademais, quando o STFA é uniformemente aperiódico e ϕ cumpre hipóteses de integrabilidade e oscilação (ver Teorema 2.22), todo ponto de acumulação u da família $\left\{ -\frac{1}{t} \log h_t \right\}$, quando $t \to \infty$, é subação aleatória calibrada para o potencial aleatório ϕ, com $\psi(\omega) = \Lambda_\infty(\omega)$, ou seja, u satisfaz

$$u(\theta\omega, x) = \min_{\substack{y \in \Sigma(\omega) \\ \sigma y = x}} [u(\omega, y) + \Lambda_\infty(\omega) - \phi(\omega, y)].$$

1 Princípios de SDAs fibrados e o *subshift* de tipo finito aleatório

1.1 Definições preliminares de dinâmicas aleatórias

No decorrer do texto, tentaremos manter grande parte das notações usualmente empregadas em trabalhos sobre otimização ergódica. Para que não haja confusão, enunciaremos algumas das notações e abreviações utilizadas.

Em otimização ergódica é comum se referir às funções que estão sendo estudadas chamando-as de observáveis ou potenciais. Ambas designações são motivadas pela modelagem de problemas físicos. Seguiremos o texto utilizando a nomenclatura de potenciais para denominar as funções consideradas.

Utilizaremos as abreviações SDT e SDA quando nos referimos a um sistema dinâmico topológico e a um sistema dinâmico aleatório, respectivamente. O modelo típico de um SDT é uma aplicação contínua e sobrejetiva T sobre um espaço métrico compacto X. Assumimos aqui o livro [Wa82] como referência de resultados em teoria ergódica para SDTs. Já as dinâmicas aleatórias estão presentes na literatura em diversos contextos. Nesta tese seguiremos os modelos apresentados, por exemplo, em [Cr02, KL06].

Os SDAs aqui estudados serão do tipo fibrados, ou seja, teremos como base um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e para cada $\omega \in \Omega$ consideramos a fibra $\Sigma(\omega)$, um subconjunto compacto de um espaço métrico (X, d). Durante todo o texto, supomos que a σ-álgebra $\mathcal{F}$ é enumeravelmente gerada, no sentido que esta contém uma álgebra enumerável $\mathcal{F}_0$ tal que, para qualquer $F \in \mathcal{F}$, há $F_0 \in \sigma(\mathcal{F}_0)$ (a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_0$) satisfazendo $\mathbb{P}(F \triangle F_0) = 0$, onde $F \triangle F_0$ denota a diferença simétrica entre F e F_0. Consideramos ainda $\theta \colon \Omega \to \Omega$ uma aplicação $\mathbb{P}$-ergódica, inversível e bimensurável. O deslocamento entre as fibras é dado por uma família de aplicações $\{\sigma_\omega \colon \Sigma(\omega) \to \Sigma(\theta\omega)\}_{\omega \in \Omega}$, a qual dá origem ao *skew-product*

$$\Theta(\omega, x) = (\theta\omega, \sigma_\omega x),$$

onde $\Sigma := \{(\omega, x) \in \Omega \times X \ | x \in \Sigma(\omega)\}$. Para simplificar a notação, escreveremos simplesmente σ em vez de σ_ω.

A natureza fibrada dos SDAs aqui considerados leva a uma identificação conveniente que faremos no texto. Dado um subconjunto $A \subset \Sigma(\omega)$, identificamo-no com o produto $\{\omega\} \times A$ e *vice-versa*. Permitimo-nos assim fazer o abuso de notação ao considerar pontos (ω, x) pertencentes à fibra $\Sigma(\omega)$.

Para enunciar uma propriedade que se verifica em um subconjunto de Ω de medida total com respeito a $\mathbb{P}$, diremos que esta propriedade ocorre ω $\mathbb{P}$-q.t.p., ou simplesmente ω q.t.p. Ao lidar com SDAs fibrados, estamos interessados em estudar probabilidades μ sobre Σ que possuem $\mathbb{P}$ como marginal em Ω, isto é, probabilidades μ tais que $\mu\big((F \times X) \cap \Sigma\big) = \mathbb{P}(F)$, para qualquer $F \in \mathcal{F}$. Em outras palavras, temos que $Proj_\Omega \mu = \mathbb{P}$ – denotaremos este espaço por $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$.

É bem sabido da literatura que, dado um SDT (X, T), ao tomar médias de medidas empíricas dadas por $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \delta_{T^n x_0}$ e fazer N tender para infinito, obtemos sequência de probabilidades cujos pontos de acumulação na topologia fraca-$*$ são probabilidades T-invariantes.

Ressaltamos aqui o primeiro contraponto dos SDAs em relação aos SDTs: não há garantia que uma sequência de médias de deltas de Dirac sobre trechos da órbita de um ponto (ω, x) possua ponto de aderência. Observe, por outro lado, que existe resultado de construção de probabilidades invariantes para sistemas dinâmicos aleatórios, o Teorema de Krylov-Bogoliubov [Cr02, Teorema 6.12], porém esse resultado é válido apenas ao considerar médias de *pullbacks* pela dinâmica de uma probabilidade que já possua marginal $\mathbb{P}$ em Ω.

Recorde que, tanto no contexto determinístico quanto no aleatório, uma probabilidade μ é ergódica se, para qualquer conjunto mensurável invariante pela dinâmica, temos $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Para poder introduzir a noção de suporte de uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$, precisamos definir primeiro os *conjuntos topológicos aleatórios*. Seguimos aqui [Cr02].

Definição 1.1. *Um conjunto $A \subset \Omega \times X$ é chamado de fechado (compacto) aleatório se ω q.t.p. (a projeção de) $A_\omega := A \cap \big(\{\omega\} \times X\big)$ é um fechado (compacto) e, para todo $x \in X$, a aplicação $\omega \mapsto d(x, A_\omega)$ é mensurável. Os abertos aleatórios são definidos como de costume por complementariedade.*

Podemos identificar um fechado aleatório ao gráfico de uma aplicação A de Ω no conjunto das partes de X, para a qual A_ω é um fechado ω $\mathbb{P}$-q.t.p. Em particular, Σ é um fechado aleatório.

Como pode ser consultado, por exemplo, em [Cr02, Proposição 3.6], quando $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra enumeravelmente gerada, o conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$ é identificado ao conjunto de medidas desintegradas, ou seja, ao gráfico de aplicações $\omega \mapsto \mu_\omega \in \mathcal{M}(X)$. Assim, toda probabilidade μ em $\Omega \times X$, com marginal $\mathbb{P}$ em Ω, possui uma única desintegração $\{\mu_\omega\}$, onde $\mathbb{P}$-q.t.p. μ_ω é probabilidade em $X \equiv \{\omega\} \times X$.

Definição 1.2. *Definimos o suporte de uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$ como o fechado aleatório dado pelo gráfico da aplicação $\mu_{\cdot} : \omega \mapsto supp(\mu_\omega)$.*

Consideraremos no estudo apenas probabilidades $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$ de suporte contido em Σ e que sejam invariantes pela dinâmica Θ, ou seja, probabilidades que verificam $\mu_\omega(\Sigma(\omega)) = 1$, para ω q.t.p., e $\mu(\Theta^{-1}A) = \mu(A)$, para todo conjunto mensurável $A \subset \Sigma$.

Enunciamos a seguir uma propriedade verificada por probabilidades invariantes, a qual pode ser tomada como definição para tais medidas. Para uma demonstração, o leitor pode consultar, por exemplo, [Ar98, Teorema 1.4.5].

Proposição 1.3. *Uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$ é Θ-invariante se, e somente se,*

$$\mu_{\theta\omega} = \sigma_* \mu_\omega.$$

A seguir, introduzimos precisamente o conjunto de probabilidades de nosso interesse.

Definição 1.4. *Denotamos por $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ o conjunto de probabilidades μ sobre $\Omega \times X$ que possuem marginal $\mathbb{P}$ em Ω e que verificam $\mu(\Sigma) = 1$ e $\mu_{\theta\omega} = \sigma_* \mu_\omega$ ω q.t.p.*

Uma vez que as probabilidades nesta tese consideradas não dão massa para pontos fora de Σ, ao mencionar uma probabilidade Θ-invariante, estaremos a partir de agora fazendo menção a uma probabilidade em $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$.

No caso de um espaço X compacto, a compacidade de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ na topologia fraca-$*$ é discutida, por exemplo, no Lema 1.7 de [BG95], via argumentos de análise funcional. Uma vez que o conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é *tight*, tal lema pode ser obtido como um caso particular da versão aleatória do Teorema de Prohorov (ver Teorema 1.7 abaixo), o qual é aplicado para SDAs com fibras compactas sobre um espaço polonês qualquer. Para sermos mais precisos, recordemos a definição de *tightness* para medidas aleatórias.

Definição 1.5. *Uma família de probabilidades $\Gamma \subset \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$ é tight se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset X$ tal que*

$$\int_{\Omega} \nu_\omega(K)\, \mathrm{d}\mathbb{P} \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \forall\, \nu \in \Gamma.$$

Observação 1.6. *Observamos que, segundo [Cr02, Proposição 4.3], a definição de tightness acima pode ser equivalentemente introduzida ao solicitar que, para cada $\varepsilon > 0$, exista um compacto aleatório $K(\omega)$ tal que, para qualquer $\nu \in \Gamma$, tem-se*

$$\int_{\Omega} \nu_\omega(K(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Esta equivalência garante que $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é tight em geral, pois Σ é um compacto aleatório e, para qualquer $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, temos $\mu_\omega(\Sigma(\omega)) = 1$, ω q.t.p.

Enunciamos abaixo a versão aleatória do Teorema de Prohorov. Sua demonstração pode ser consultada, por exemplo, em [Cr02, Teorema 4.29].

Teorema 1.7. *Seja $\Gamma \subset \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$. Temos que Γ é tight se, e somente se, Γ é relativamente compacto com respeito à topologia fraca-$*$ de $\mathcal{M}(\Omega \times X)$. Nesse caso, Γ também é relativamente sequencialmente compacto.*

Corolário 1.8. *O conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é compacto na topologia fraca-$*$.*

O conjunto de potenciais aleatórios que nos servirá de pilar para o estudo é formado pelas funções que apresentam continuidade em cada fibra.

Definição 1.9. *Seja (Σ, Θ) um SDA fibrado. Denotamos por $C(\Sigma)$ o conjunto de potenciais aleatórios $\phi\colon \Omega \times X \to \mathbb{R}$ que satisfazem as condições abaixo:*

$$\omega \mapsto \phi(\omega, x) \quad \text{é mensurável para todo } x,$$

$$\phi_\omega = \phi(\omega, \cdot)\colon \Sigma(\omega) \to \mathbb{R} \qquad \text{é contínuo } \omega \text{ q.t.p.}$$

Como estamos interessados em avaliar os potenciais aleatórios apenas sobre Σ, podemos pensar simplesmente que um potencial $\phi \in C(\Sigma)$ é uma família de funções da forma $\phi = \{\phi_\omega\colon \Sigma \to \mathbb{R}\}$, onde ϕ_ω é contínua. Precisamos ainda nos atentar quanto à integrabilidade dos potenciais considerados. Para tanto, definimos o espaço $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$.

Definição 1.10. *Definimos* $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ *como o conjunto de potenciais aleatórios* $\phi \in C(\Sigma)$ *tais que*

$$\|\phi\| := \int_\Omega \|\phi\|_\omega \, \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty,$$

onde $\|\phi\|_\omega := \sup_{x \in \Sigma(\omega)} |\phi(\omega, x)|$.

Recorde que consideramos a σ-álgebra $\mathcal{F}$ enumeravelmente gerada. Assim, a σ-álgebra em Σ, formada a partir de conjuntos $(F \times B) \cap \Sigma$, onde $F \in \mathcal{F}$ e B é boreliano de X, também é enumeravelmente gerada. Consequentemente, $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é um espaço de Banach separável. Como observado por Crauel em [Cr86], a demonstração desse fato é facilmente adaptada do Teorema B (página 168) e da Observação 1 (página 177) de [Ha74].

Denotamos por $\mathcal{MS}(X)$ o espaço das medidas com sinal sobre X. Também é assinalado em [Cr86] que o dual de $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ pode ser identificado com $L^\infty_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{MS}(X))$, o espaço das medidas com sinal m sobre $\Omega \times X$, de marginal $\mathbb{P}$ e essencialmente limitadas, no sentido que

$$\inf \left\{ a \ : \ \mathbb{P}\big[\sup_{\|\phi\| \leqslant 1} \int_X \phi(\omega, x) \, \mathrm{d}m_\omega(x) > a \big] = 0 \right\} < \infty.$$

Em particular, $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é um subconjunto convexo e compacto (na topologia fraca-$*$) da bola unitária do dual de $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$.

Ao longo da tese, por diversas vezes, utilizaremos o Teorema ergódico de Birkhoff e o Teorema ergódico subaditivo de Kingmann. Estes são teoremas clássicos de teoria ergódica. Referenciamos [AB09] para o leitor que desejar consultar uma elegante demonstração destes teoremas.

Um dos objetos centrais do estudo de otimização ergódica é a constante ergódica maximal do potencial estudado (seja ele aleatório ou não).

Definição 1.11. *Dados um SDT* (X, T) *e um potencial* $f \in C(X)$ *ou um SDA fibrado* (Σ, Θ) *e um potencial aleatório* $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$*, em ambos os casos a constante ergódica maximal será denotada por* β*:*

$$\beta(f) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T} \int f \, \mathrm{d}\mu \qquad \textit{ou} \qquad \beta(\phi) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \int \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

O estudo da constante β diversas vezes passa pelo cálculo de médias de Birkhoff. Tanto no contexto de um SDT quanto em um SDA, a soma de Birkhoff de um potencial f

ou de um potencial aleatório ϕ é denotada por $S_n f(x)$ ou $S_n\phi(\omega, x)$, respectivamente, sendo dada como

$$S_n f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) \qquad \text{ou} \qquad S_n\phi(\omega, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \Theta^i(\omega, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\theta^i\omega, \sigma^i x).$$

O leitor pode consultar, por exemplo, em [CG93, Teorema 2.1 e Teorema 2.2], ou em [Je06, Proposição 2.1], caracterizações da constante $\beta(f)$ via médias de Birkhoff no caso determinístico. Para ser mais preciso, é bem conhecido que, para $f \in C(X)$, ocorre

$$\beta(f) = \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \frac{1}{n} S_n f(x) = \sup_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x).$$

Uma versão aleatória de caracterização análoga para $\beta(\phi)$ pode ser encontrada, por exemplo, em [Cr02, Proposição 6.21], da qual é possível obter que, ω q.t.p.,

$$\beta(\phi) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x) = \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x).$$

Para o caso de potenciais aleatórios suficientemente regulares, o leitor encontrará no Lema 2.5 dessa tese uma demonstração alternativa destas caracterizações da constante ergódica aleatória, demonstração esta obtida utilizando o formalismo termodinâmico.

Outra caracterização de $\beta(f)$ presente na literatura de sistemas determinísticos é obtida por uma representação dual, como em [CG93, Teorema 2.2],

$$\beta(f) = \inf_{g\in C(X)} \sup_{x\in X} \left[f(x) + g \circ T(x) - g(x)\right].$$

O formalismo termodinâmico para potenciais aleatórios suficientemente regulares é útil também para obter esta representação no caso de um SDA fibrado. No Teorema 2.6 desta tese, demonstramos a igualdade a seguir

$$\beta(\phi) = \inf_{v\in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \int_\Omega \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \left[\phi(\omega, x) + v(\theta\omega, \sigma x) - v(\omega, x)\right] \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Retornando à Proposição 6.21 de [Cr02], lá se garante a existência de probabilidade ergódica maximizante para potenciais aleatórios $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. Como de costume, as probabilidades que realizam o supremo na definição de $\beta(\phi)$ são chamadas de maximizantes.

Definição 1.12. *Dados um SDA fibrado (Σ, Θ) e $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, definimos o conjunto de* *probabilidades ϕ-maximizantes como*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}}^{max}(\phi) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma) \mid \int_{\Sigma} \phi \, \mathrm{d}\mu = \beta(\phi) \right\}.$$

Dado um SDA fibrado (Σ, Θ), um cobordo dinâmico, ou simplesmente cobordo, é uma função aleatória da forma $u \circ \Theta - u$. Como consideramos apenas probabilidades invariantes pela dinâmica, é claro que, se $u \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, então a integral do cobordo associado com respeito a uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é nula. Dizemos ainda que dois potenciais são cohomólogos se sua diferença é igual a um cobordo. É de imediata verificação que dois potenciais cohomólogos possuem o mesmo conjunto de probabilidades maximizantes. O mesmo ocorre para potenciais que diferem por uma constante.

O conceito de subação é uma ferramenta já bem difundida na literatura sobre otimização ergódica para SDTs que auxilia, por exemplo, na localização do suporte de probabilidades maximizantes.

Definição 1.13. *Sejam (X, T) um SDT e $f \in C(X)$. Uma subação para f é uma função contínua $u \colon X \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in X$, vale a desigualdade cohomológica*

$$f(x) + u \circ T(x) - u(x) \leqslant \beta(f).$$

Observe que a continuidade do potencial f e da subação u (se esta existir) permitem concluir que o suporte de qualquer probabilidade f-maximizante $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ está contido no conjunto

$$(f + u \circ T - u - \beta(f))^{-1}(0).$$

Uma interessante aplicação da existência de subações pode ser consultada em [QS11]. Nesse trabalho, os autores provam que, em um subconjunto de $C(X)$, ou melhor, no conjunto das funções ditas super-contínuas, há um aberto denso (na topologia adequada) de funções que admitem uma única probabilidade maximizante, sendo esta probabilidade suportada em uma órbita periódica. Na verdade, uma classe particular de subações, conhecidas como subações calibradas, é uma ferramenta relevante utilizada pelos autores em sua demonstração.

Definição 1.14. *Dados um SDT (X, T) e um potencial $f \in C(X)$, uma subação u para f*

é dita ser calibrada se satisfaz a equação

$$u(x) = \min_{Ty=x} \left[u(y) - f(y) + \beta(f) \right], \quad \forall\, x \in X.$$

Em geral, para obter a existência de subações é preciso assumir determinadas hipóteses sobre a dinâmica. Uma hipótese comum é supor expansividade, no sentido que existe $\varepsilon_0 > 0$ para o qual

$$d(T^i x, T^i y) < \varepsilon_0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

A definição de expansividade no contexto de uma dinâmica aleatória é bastante similar.

Definição 1.15. *Seja $\mathfrak{N}$ o conjunto formado pelas variáveis aleatórias positivas $\varepsilon(\omega)$ tais que o logaritmo da menor cardinalidade de uma cobertura de $\Sigma(\omega)$ por bolas fechadas de raio $\varepsilon(\omega)$ é integrável com respeito a $\mathbb{P}$. Dizemos que um SDA fibrado (Σ, Θ) é expansivo se existe uma variável aleatória $\varepsilon_0 \in \mathfrak{N}$ tal que, para quase todo ω e para quaisquer $x, y \in \Sigma(\omega)$ com $x \neq y$, há $i \in \mathbb{N}$ satisfazendo*

$$d(\sigma^i x, \sigma^i y) > \varepsilon_0(\theta^i \omega).$$

Outra hipótese corriqueira para garantir a existência de subações é a transitividade, isto é, a existência de ponto cuja órbita é densa, ou ainda, mais restritivamente, solicitar que a dinâmica seja topologicamente *mixing*. Recordamos que um SDT é topologicamente *mixing* quando, para quaisquer abertos não vazios $U, V \subset X$, há $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ sempre que $n \geqslant N$. Na próxima seção, definiremos precisamente o que vem a ser, no contexto simbólico, uma dinâmica aleatória topologicamente *mixing* (ver definição 1.25).

Sem embargo, é importante destacar que, além de hipóteses sobre a dinâmica, também é preciso impor certa regularidade aos potenciais considerados. Isto porque uma consequência do Teorema A de [BJ02] é que, para um SDT expansivo e transitivo, um potencial genérico na topologia C^0 não admite subação. Por outro lado, por exemplo, em [CLT01, Teorema 9], os autores demonstram que, no contexto de uma dinâmica expansiva continuamente diferenciável sobre o círculo, todo potencial holderiano admite subação de mesma regularidade. A propriedade de continuidade holderiana para potenciais aleatórios será introduzida na definição 1.27 da próxima seção.

Há uma vasta literatura que diz respeito ao estudo de subações e implicações de sua existência no caso determinístico [Sa99, Bou01, CLT01, LT03, Je06, GLT09, Ga18]. Uma das técnicas utilizadas para se obter subações consiste em fazer uso de ferramentas do formalismo termodinâmico, como o operador de transferência $\mathcal{L}_f$ dado por

$$\mathcal{L}_f g(x) := \sum_{Ty=x} \mathrm{e}^{f(y)} g(y), \quad \forall\, g \in C(X),$$

ou ainda a pressão topológica, descrita pelo Princípio Variacional como

$$P(f) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}(T)} \left\{ h_\mu(T) + \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right\}, \quad \forall\, f \in C(X).$$

O Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius é um clássico teorema da literatura de sistemas determinísticos e possui generalizações para SDAs, como veremos na próxima seção (consulte o Teorema 1.32). Ambientado no contexto de dinâmica simbólica, o leitor pode consultar, por exemplo, em [PP90, Teorema 2.2 e Teorema 3.5], que para todo potencial holderiano $f\colon X \to \mathbb{R}$ há uma tripla (λ, h, ν), onde h e ν são autofunção e automedida do operador de transferência e de seu dual, respectivamente, ambos com autovalor λ. Este autovalor está associado à pressão topológica de f pela igualdade $P(f) = \mathrm{e}^{\lambda}$. Por outro lado, a probabilidade $\mu = h\nu$ é T-invariante e configura um estado de equilíbrio para f, isto é, uma probabilidade que realiza o supremo na definição da pressão acima.

A partir do formalismo termodinâmico é possível obter resultados de otimização ergódica via processo chamado congelamento do sistema [Sa99, CLT01] sobre um potencial holderiano $f\colon X \to \mathbb{R}$. Para ser mais preciso, multiplica-se o potencial por um parâmetro $t > 0$, o qual tem a interpretação física como inverso da temperatura absoluta, e se examina na escala apropriada o comportamento assintótico da tripla correspondente (λ_t, h_t, ν_t). Assim, ao fazer este parâmetro tender a infinito, entende-se que a temperatura está indo para zero. Em [CLT01, Proposição 29] os autores assinalam como desse processo se pode obter probabilidade f-maximizante como limite de estados de equilíbrio e garantir a existência de subação calibrada. Para conveniência do leitor, reproduzimos este resultado a seguir.

Proposição 1.16. *Considere um SDT expansivo e topologicamente mixing sobre S^1 e f um potencial holderiano. Então*

(i) Quando $t \to \infty$, qualquer ponto de acumulação μ_∞ da família família de estados de equilíbrio μ_t (cada um associado ao operador $\mathcal{L}_{tf}$) é maximizante para f;

(ii) Todo ponto de acumulação μ_∞ é de máxima entropia dentre as probabilidades f-maximizantes;

(iii) Escrevendo a autofunção h_t associada ao operador $\mathcal{L}_{tf}$ como e^{tV_t}, qualquer ponto de acumulação da família $\{V_t\}$ é uma subação calibrada para f.

Na Proposição 2.2 e no Teorema 2.22 desta tese, o leitor encontrará resultados que fornecem uma versão aleatória da proposição acima. Sendo mais preciso, o processo de congelamento do sistema nos permite concluir que, assim como ocorre no caso determinístico, também no contexto aleatório, quando a temperatura tende a zero, pontos de acumulação da família de estados de equilíbrio são probabilidades maximizantes (ver Proposição 2.2). Além disso, estendemos o conceito de subação para dinâmicas aleatórias e mostramos que potenciais aleatórios suficientemente regulares admitem subação aleatória calibrada, obtida como limite de autofunções em escala logarítmica (ver Teorema 2.22).

A noção de subação aleatória aqui introduzida é original. No contexto aleatório, o cobordo dinâmico de uma subação aleatória deve satisfazer desigualdade cohomológica não com a constante ergódica maximal, mas sim com uma variável aleatória cuja média é a constante maximal (para detalhes, ver definição 2.7). Na verdade, esta definição é uma generalização do conceito de subação no contexto determinístico, uma vez que todo SDT pode ser representado na forma de um SDA fibrado no qual $\mathbb{P}$ se reduz a uma delta de Dirac sobre um ponto $\omega_0 \in \Omega$.

Para o leitor que não está familiarizado com as noções básicas do formalismo dinâmico aleatório, abordaremos brevemente as definições de entropia métrica relativa e pressão topológica relativa para um SDA fibrado. Reproduzimos aqui as definições de [KL06], mas o leitor poderá encontrar definições equivalentes, por exemplo, nas referências [SU14, Bog92].

Consideramos um SDA fibrado (Σ, Θ) e $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. Seja $\mathcal{F}_\Sigma$ a σ-álgebra em Σ gerada pelos conjuntos $(F \times B) \cap \Sigma$, com $F \in \mathcal{F}$ e B boreliano de X. Então, a entropia condicional de uma partição enumerável $\mathcal{P}$ com respeito a μ, dada a σ-álgebra $\mathcal{F}_\Sigma$, é definida como

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{F}_\Sigma) := -\int_\Omega \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu_\omega(P(\omega)) \log \mu_\omega(P(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega H_{\mu_\omega}(\mathcal{P}(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P},$$

onde $P(\omega) = P \cap \Sigma(\omega)$ e $H_{\mu_\omega}(\mathcal{P}(\omega))$ denota a entropia usual da partição $\mathcal{P}(\omega)$ de $\Sigma(\omega)$.

Definição 1.17. *A entropia métrica relativa de μ é dada por*

$$h_\mu^{rel}(\Theta) := \sup_{\mathcal{P}} h_\mu^{rel}(\Theta, \mathcal{P}),$$

sendo o supremo tomado sobre partições enumeráveis $\mathcal{P}$ de Σ e

$$h_\mu^{rel}(\Theta, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \Theta^{-i}(\mathcal{P}) | \mathcal{F}_\Sigma \right).$$

A entropia métrica usual e a entropia métrica relativa de Θ estão relacionadas pela fórmula de Abramov-Rokhlin [AR66, BC92]:

$$h_\mu(\Theta) = h_\mu^{rel}(\Theta) + h_{\mathbb{P}}(\theta).$$

Como observado, por exemplo, no Teorema 1.3.5 de [KL06], quando o SDA fibrado (Σ, Θ) é expansivo, a entropia métrica relativa é semicontínua superiormente com respeito a $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$.

Já a pressão topológica relativa de um potencial aleatório $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, também chamada de pressão topológica fibrada de ϕ, está presente na literatura usualmente ambientada no contexto do espaço métrico X ser compacto. Para apresentar sua definição, precisamos primeiro definir dois conceitos: a função de partição aleatória e os conjuntos (ω, n, ε)-separados. Recorde que as fibras $\Sigma(\omega)$ estão munidas da métrica induzida por d (a métrica do espaço X).

Definição 1.18. *Dados um SDA fibrado (Σ, Θ) e uma variável aleatória positiva $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, um conjunto $F \subset \Sigma(\omega)$ é dito (ω, n, ε)-separado se, para quaisquer $x, y \in F$ com $x \neq y$,*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \frac{d(\sigma^i x, \sigma^i y)}{\varepsilon(\theta^i \omega)} > 1.$$

Note que, como as fibras são compactas, existe sempre uma cota superior $s(\omega, n, \varepsilon) < \infty$ para a cardinalidade dos conjuntos (ω, n, ε)-separados de $\Sigma(\omega)$. Sendo assim, um conjunto (ω, n, ε)-separado F é dito maximal se sua cardinalidade for igual a $s(\omega, n, \varepsilon)$. Em particular, dado um conjunto (ω, n, ε)-separado maximal F, para qualquer $x \in F^{\complement} \cap \Sigma(\omega)$, temos que $F \cup \{x\}$ não é conjunto (ω, n, ε)-separado.

Definição 1.19. *Seja (Σ, Θ) um SDA fibrado. Dados um potencial aleatório $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, um inteiro $n > 0$, uma variável aleatória positiva $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ e um conjunto (ω, n, ε)-separado*

$F \subset \Sigma(\omega)$, *definimos a função de partição aleatória por*

$$Z_n(\omega, \phi, F) := \sum_{x \in F} \mathrm{e}^{S_n \phi(\omega, x)}.$$

Observe que, para qualquer conjunto (ω, n, ε)-separado F, ocorre sempre

$$Z_n(\omega, \phi, F) \leqslant s(\omega, n, \varepsilon)\mathrm{e}^{\|S_n \phi\|_\omega}.$$

Então, dado $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, consideramos

$$\Pi^{rel}(\phi)(\omega, n, \varepsilon) := \sup_F Z_n(\omega, \phi, F),$$

sendo o supremo tomado sobre os conjuntos (ω, n, ε)-separados maximais. A mensurabilidade de $\Pi^{rel}(\phi)(\omega, n, \varepsilon)$ com respeito a ω é discutida, por exemplo, no Lema 1.2.2 de [KL06]. Introduz-se a seguir

$$\Pi^{rel}(\phi)(\varepsilon) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_\Omega \log\left(\Pi^{rel}(\phi)(\omega, n, \varepsilon)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Definição 1.20. *A pressão topológica relativa de ϕ é dada por*

$$\Pi^{rel}(\phi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \Pi^{rel}(\phi)(\varepsilon),$$

onde o limite é tomado para $\varepsilon > 0$ não aleatório, ou seja, identicamente constante sobre as fibras.

Note que, quando tomamos $\phi \equiv 0$, temos $\Pi^{rel}(0) = h^{rel}_{top}(\Theta)$, a entropia topológica relativa de Θ. Enunciamos então o Teorema 1.2.13 de [KL06], que trata do Princípio Variacional para SDAs fibrados com fibras mergulhadas em um espaço métrico compacto.

Teorema 1.21. *Sejam (Σ, Θ) um SDA fibrado e $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. Temos que*

$$\Pi^{rel}(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \left\{ h^{rel}_\mu(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, \mathrm{d}\mu \right\}.$$

Observamos que a pressão topológica relativa de um potencial ϕ pode ser obtida através de outras abordagens, como, por exemplo, pela utilização de coberturas abertas de Σ em vez de conjuntos (ω, n, ε)-separados. Tal fato é discutido, por exemplo, em [KL06, página 14]. Por outro lado, quando o espaço métrico X não é compacto, considera-se uma variação da função de partição aleatória para generalizar a pressão topológica relativa. Tal generalização é chamada de pressão de Gurevich [DKS08, Teorema 3.2].

1.2 *Subshift* de tipo finito aleatório

O *subshift* de tipo finito aleatório (STFA) aqui considerado é um modelo de SDA fibrado estudado por Bogenschutz e Gundlach em [BG95]. Ao longo dos anos, esse modelo de dinâmica aleatória desenvolveu-se em múltiplas vertentes, como, por exemplo, em [Gu97, KL06, Ki08, DKS08, MSU10, St10, St17], sempre com hipóteses menos restritivas que as iniciais.

Em todas as versões de STFA presentes em nossas referências, sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra enumeravelmente gerada módulo $\mathbb{P}$, toma-se uma aplicação inversível e $\mathbb{P}$-ergódica $\theta\colon \Omega \to \Omega$. Recorde que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra enumeravelmente gerada módulo $\mathbb{P}$ se há uma álgebra enumerável $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tal que, para qualquer $F \in \mathcal{F}$, há $F_0 \in \sigma(\mathcal{F}_0)$ (a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_0$) com $\mathbb{P}(F \triangle F_0) = 0$, onde $F \triangle F_0$ denota a diferença simétrica entre os conjuntos F e F_0.

Para um melhor entendimento do leitor não familiarizado com os SDAs, observamos que muitos resultados são estabelecidos no contexto em que o espaço X é suposto compacto. Note que é sempre possível passar a uma compactificação de X e utilizar métrica compatível, como em [BG95]. Porém, como os resultados técnicos sobre os quais escolhemos nos basear estão ambientados em um contexto mais geral, onde apenas as fibras do sistema dinâmico são compactas, sempre interpretaremos X como segue, o que nos permitirá trabalhar com modelos menos restritivos de dinâmica.

Definição 1.22. *Definimos o espaço métrico X como o conjunto de sequências*

$$X := \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{N},$$

munido da distância $d(x, y) := r^{\min\{i| \ x_i \neq y_i\}}$, onde $0 < r < 1$ é uma constante fixada.

A aleatoriedade da dinâmica reside em dois fatores: o tamanho do alfabeto contendo o primeiro símbolo dos pontos de cada fibra e as diferentes permissões de concatenações de símbolos entre as fibras.

Definição 1.23. *Seja $\ell\colon \Omega \to \mathbb{N}$ uma variável aleatória com $\ell(\omega) \geqslant 2$, para todo $\omega \in \Omega$. Definimos as matrizes de transição aleatórias A_ω como sendo matrizes mensuráveis de* *dimensões $\ell(\omega) \times \ell(\theta\omega)$, com entradas 0 ou 1, tais que há pelo menos uma entrada não nula em cada linha e em cada coluna.*

Definimos então a dinâmica denominada *subshift* de tipo finito aleatório.

Definição 1.24. *Para cada $\omega \in \Omega$, definimos a fibra*

$$\Sigma(\omega) := \left\{x \in X : (A_{\theta^i\omega})_{x_i x_{i+1}} = 1,\ \forall\ i = 0, 1, ...\right\}.$$

Consideramos $\sigma\colon \Sigma(\omega) \to \Sigma(\theta\omega)$ o shift à esquerda, ou seja, $(\sigma x)_i = x_{i+1}$. Assim, o subshift de tipo finito aleatório é a dinâmica sobre o conjunto $\Sigma := \prod_{\omega\in\Omega} \{\omega\} \times \Sigma(\omega)$ dada pelo skew-product

$$\Theta\colon (\omega, x) \in \Sigma(\omega) \mapsto (\theta\omega, \sigma x) \in \Sigma(\theta\omega).$$

Note que $\Sigma(\omega) \subset \prod_{i\in\mathbb{N}} \left\{1, 2, \ldots, \ell(\theta^i\omega)\right\}$. Assim, como $\Sigma(\omega)$ é um fechado contido em um conjunto compacto, claramente $\Sigma(\omega)$ é um compacto de X para cada $\omega \in \Omega$. Em particular, Σ é um compacto aleatório como na definição 1.1, estando a condição de mensurabilidade lá exigida assegurada pela equivalência

$$d(x, \Sigma(\omega)) = r^n \quad \Leftrightarrow \quad (A_{\theta^i\omega})_{x_i x_{i+1}} = 1, \text{ para } i = 0, \ldots, n-1 \quad \text{e} \quad (A_{\theta^n\omega})_{x_n x_{n+1}} = 0.$$

Quando $\int_\Omega \log \ell \, d\mathbb{P} < \infty$, é fácil perceber que o STFA (Σ, Θ) é uma dinâmica aleatória expansiva no sentido da definição 1.15, bastando escolher, por exemplo, $\varepsilon_0(\omega) \equiv r$ como variável aleatória de expansividade.

Noções usuais de dinâmica simbólica e codificação admitem naturalmente versões aleatórias. Chamamos de palavra de tamanho n qualquer sequência finita de n símbolos $c = (c_0, c_1, ..., c_{n-1})$. Uma palavra c é dita ω-admissível quando $(A_{\theta^i\omega})_{c_i c_{i+1}} = 1$, para $0 \leqslant i \leqslant n-2$. O conjunto de palavras ω-admissíveis de tamanho n será denotado por W_ω^n. Dados um ponto $x \in \Sigma(\theta^n\omega)$ e uma palavra $c \in W_\omega^n$, cx indica o ponto em X obtido pela concatenação de c com x, ou seja, $cx = (c_0, ...c_{n-1}, x_0, x_1, ...)$. Consideramos ainda, para $x \in \Sigma(\theta^n\omega)$, o conjunto $W_\omega^n(x) := \{c \in W_\omega^n \ : \ cx \in \Sigma(\omega)\}$. Os cilindros de tamanho n do STFA serão denotados por

$$[c]_\omega := \{x \in \Sigma(\omega) \ : \ x_i = c_i,\ i = 0, ..., n-1\},$$

onde $c \in W_\omega^n$. Podemos fazer um abuso de notação e dizer que o cilindro $[c]_\omega$ é vazio quando c não é uma palavra ω-admissível.

Na versão de STFA considerada em [BG95], impõe-se que as matrizes de transição aleatórias sejam uniformemente aperiódicas, ou seja, que exista uma constante $M \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $i \in W_\omega^1$ e $j \in W_{\theta^M\omega}^1$, a entrada ij da matriz $A_\omega \cdot \ldots \cdot A_{\theta^{M-1}\omega}$ é estritamente positiva. Já em [Gu97], STFA mais geral é levado em conta ao supor que a família $\{A_\omega\}$ é aperiódica. Mais precisamente, assume-se que o expoente $M(\omega)$, responsável por tornar o produto de matrizes $A_\omega \cdot \ldots \cdot A_{\theta^{M(\omega)}}$ positivo em todas as suas entradas, é uma variável aleatória. Posteriormente em [St10], mostra-se que a aperiodicidade da família de matrizes de transição aleatórias resulta da existência de conjuntos de medida positiva

$$\Omega_P^K := \left\{\omega \in \Omega \mid \#W_{\theta^{-1}\omega}^1 \leqslant K\right\} \quad \text{e} \quad \Omega_I^K := \left\{\omega \in \Omega \mid \#W_\omega^1 \leqslant K\right\},$$

o que se assegura de maneira imediata para K suficientemente grande, e da hipótese do STFA ser topologicamente *mixing*.

Definição 1.25. *O STFA (Σ, Θ) é topologicamente mixing se para quaisquer índices $i, j \geqslant 1$ há uma variável aleatória $N_{ij}(\omega)$ a valores naturais tal que, para qualquer $n \geqslant N_{ij}(\omega)$, se $i \in W_\omega^1$ e $j \in W_{\theta^n\omega}^1$, então $[i]_\omega \cap \sigma^{-n}([j]_{\theta^n\omega}) \neq \varnothing$, isto é, temos $icj \in W_\omega^{n+1}$, com $c \in W_{\theta\omega}^{n-1}$.*

Na verdade, a propriedade suposta em [St10] é mais abrangente que a existência dos conjuntos de medida positiva Ω_P^K e Ω_I^K e usualmente é referida como propriedade BIP (*Big Images and Preimages*), sendo introduzida no contexto de cadeias markovianas aleatórias, as quais podem assumir alfabeto infinito enumerável para uma quantidade de fibras de medida positiva com respeito a $\mathbb{P}$. Trata-se, portanto, de um contexto mais geral que os *subshifts* de tipo finito aleatórios nesta tese considerados.

Para o leitor não familiarizado, fornecemos a seguir uma demonstração da aperiodicidade da família de matrizes de transição aleatórias. Em parte da literatura, como [MSU10], *shifts* com a propriedade aperiódica são chamados de topologicamente exatos.

Lema 1.26. *Dado um STFA (Σ, Θ) topologicamente mixing, há funções mensuráveis $M, J \colon \Omega \to \mathbb{N}$ tais que, ω q.t.p., temos*

$$\begin{aligned} \sigma^{M(\omega)}\left([i]_\omega\right) &= \Sigma\left(\theta^{M(\omega)}\omega\right), & \forall\, i \in W_\omega^1, \\ \sigma^{J(\omega)}\left([i]_{\theta^{-J(\omega)}\omega}\right) &= \Sigma(\omega), & \forall\, i \in W_{\theta^{-J(\omega)}\omega}^1. \end{aligned}$$

Demonstração. Considere a constante K suficientemente grande para definir o conjunto Ω_P^K (como acima) com medida positiva. Seja $i \in W_\omega^1$. Tomamos $N_\omega(i) = \max\{N_{ij}(\omega) \mid j \leqslant K\}$, onde $N_{ij}(\omega)$ é a variável aleatória da definição de topologicamente *mixing*, e consideramos para quase todo ω

$$p_\omega(i) := \min\left\{n \geqslant N_\omega(i) \mid \theta^n\omega \notin \Omega_P^K \text{ e } \theta^{n+1}\omega \in \Omega_P^K\right\}.$$

Então, definimos ω q.t.p.

$$M(\omega) := \max_{i \in W_\omega^1} p_\omega(i).$$

É fácil ver que $\sigma^{M(\omega)}([i]_\omega) = \Sigma(\theta^{M(\omega)}\omega)$. Com efeito, fixado $i \in W_\omega^1$, temos $\theta^{p_\omega(i)+1}\omega \in \Omega_P^K$. Assim sendo, como $\#W^1_{\theta^{p_\omega(i)}\omega} \leqslant K$ e $p_\omega(i) \geqslant N_\omega(i)$, vale que

$$\Sigma(\theta^{p_\omega(i)}\omega) = \bigcup_{l \leqslant K}[l]_{\theta^{p_\omega(i)}\omega} \subset \sigma^{p_\omega(i)}([i]_\omega) \subset \Sigma(\theta^{p_\omega(i)}\omega).$$

Consequentemente, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos $\Sigma(\theta^{p_\omega(i)+k}\omega) = \sigma^{p_\omega(i)+k}([i]_\omega)$.

Uma vez definido $M(\omega)$, a variável aleatória $J(\omega)$ é introduzida por

$$J(\omega) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in \theta^n(\Upsilon_n)\},$$

onde $\Upsilon_n := \{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \leqslant n\}$. Note que $\Upsilon_{J(\omega)} = \{\omega' \in \Omega \mid M(\omega') \leqslant J(\omega)\}$. Deste modo, utilizando a sobrejetividade de σ, para qualquer cilindro $[i]_{\theta^{-J(\omega)}\omega}$ ocorre a igualdade $\sigma^{J(\omega)}([i]_{\theta^{-J(\omega)}\omega}) = \Sigma(\omega)$, para qualquer $i \in W^1_{\theta^{-J(\omega)}\omega}$. $\square$

Recorde que a n-ésima variação de um potencial aleatório ϕ com respeito a fibra $\Sigma(\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} var_\omega^n(\phi) &:= \sup\{|\phi(\omega,x) - \phi(\omega,y)| \ : \ d(x,y) \leqslant r^n, \text{ com } x,y \in \Sigma(\omega)\} \\ &= \sup\{|\phi(\omega,x) - \phi(\omega,y)| \ : \ x,y \in [c]_\omega, \text{ com } c \in W_\omega^n\}. \end{aligned}$$

Definição 1.27. *Um potencial aleatório $\phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ é dito ser localmente holderiano (nas fibras) se existe uma variável aleatória $\kappa \geqslant 1$, com $\int_\Omega \log\kappa \, d\mathbb{P} < \infty$, tal que*

$$var_\omega^n(\phi) \leqslant \kappa(\omega) r^n, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

Consideramos sempre a menor variável aleatória κ que satisfaz a inequação acima. Deno-

taremos por $\mathcal{H}(\Sigma)$ o conjunto de potenciais aleatórios localmente holderianos.

Sendo uma das principais ferramentas do formalismo termodinâmico para sistemas dinâmicos aleatórios, o operador de transferência aleatório é introduzido como a seguir.

Definição 1.28. *Sejam (Σ, Θ) um STFA e $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. O operador de transferência $\mathcal{L}_\phi$ age em $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ de maneira diagonal nas fibras, mais precisamente $\mathcal{L}_\phi(\omega)\colon C(\Sigma(\omega)) \to C(\Sigma(\theta\omega))$ é definido por*

$$\mathcal{L}_\phi(\omega) f(\theta\omega, x) := \sum_{\substack{y \in \Sigma(\omega) \\ \sigma y = x}} \mathrm{e}^{\phi(\omega, y)} f(\omega, y), \quad \forall\, f \in C(\Sigma(\omega)).$$

Note que podemos escrever para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}^n_\phi(\omega) f(\theta^n\omega, x) = \sum_{c \in W^n_\omega(x)} \mathrm{e}^{S_n\phi(\omega, cx)} f(\omega, cx).$$

Uma vez que o conjunto de potenciais aleatórios $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é um espaço de Banach, sobre o seu dual está naturalmente definido o operador $\mathcal{L}^*_\phi$. Temos assim

$$\int_X g \,\mathrm{d}\big(\mathcal{L}^*_\phi(\omega) m_{\theta\omega}\big) = \int_X \mathcal{L}_\phi(\omega) g \,\mathrm{d}m_{\theta\omega},$$

onde $m \in L^\infty_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{MS}(X))$ e $g \in C(\Sigma(\omega))$.

Há duas hipóteses fundamentais sobre o potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ que são impostas para assegurar versões aleatórias tanto do Princípio Variacional e quanto do Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius. Assumidas em basicamente todas as referências aqui citadas, estas são abaixo reproduzidas:

(HB) $\displaystyle\int_\Omega \log B_\omega \,\mathrm{d}\mathbb{P} < \infty;$

(HL) $\log \|\mathcal{L}_\phi 1\|_\omega \in L^1(\mathbb{P}),$

onde B_ω é a variável aleatória associada ao potencial aleatório localmente holderiano ϕ via

$$B_\omega := \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \kappa(\theta^{-k}\omega) r^k\right), \tag{1.1}$$

e $\mathcal{L}_\phi 1$ representa o operador de transferência $\mathcal{L}_\phi$ aplicado à função aleatória identicamente constante igual a 1.

Uma vez que estamos supondo $\log \kappa$ integrável com respeito a $\mathbb{P}$, seu crescimento deve ser subexponencial, no sentido que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \kappa(\theta^{-k}\omega) = 0$, ω-$\mathbb{P}$ q.t.p. Segue daí que, para quase todo ω, B_ω é finito. Além disso, uma condição suficiente para (HB) decorre de $\int_\Omega \kappa(\omega)\, d\mathbb{P} < \infty$, como observado em [DKS08, Lema 2.1]. Por outro lado, a hipótese (HL) é satisfeita ao considerar $\log \ell \in L^1(\mathbb{P})$, pois é fácil ver que

$$\log \mathcal{L}_\phi(\omega)1(\theta\omega, x) \leqslant \log \ell(\omega) + \|\phi\|_\omega.$$

Em [DKS08, Teorema 4.2], é demonstrado o Princípio Variacional para cadeias markovianas aleatórias, que englobam os *subshifts* de tipo finito aleatórios. Para apresentar o Princípio Variacional naquele contexto os autores utilizam a pressão de Gurevich, a qual, já mencionamos anteriormente, é uma generalização da pressão topológica quando se trabalha em espaços não necessariamente compactos. Para tanto, é considerada uma versão alternativa da função de partição aleatória, como a seguir.

Definição 1.29. *Sejam (Σ, Θ) um STFA topologicamente mixing e $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$. Dados $i, j \in \mathbb{N}$, a n-ésima função de partição aleatória é definida por*

$$Z_\omega^n(\phi, i, j) := \sum_c \exp\left(\sup_{x\in[ic]_\omega} S_n\phi(\omega, x) \right),$$

onde o somatório é tomado sobre as palavras $c \in W_{\theta\omega}^{n-1}$ tais que $icj \in W_\omega^{n+1}$. Por convenção, $Z_\omega^n(\phi, i, j) = 0$ caso não exista palavra $c \in W_{\theta\omega}^{n-1}$ satisfazendo a condição.

Note que a noção de função de partição aleatória acima e aquela introduzida na definição 1.19 estão relacionadas. Como os cilindros são compactos, sempre há pontos $x_c \in [ic]_\omega$ que realizam cada um dos supremos na definição de $Z_\omega^n(\phi, i, j)$. Sendo assim, a família finita $\{x_c\}$, obtida ao variar as palavras $c \in W_{\theta\omega}^{n-1}$ tais que $icj \in W_\omega^{n+1}$, é claramente um conjunto (ω, n, ε)-separado com $\varepsilon = r$.

O Teorema 3.2 de [DKS08] nos diz que, se $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ satisfaz as hipóteses (HB) e (HL), então há um conjunto $\Omega' \subset \Omega$ de medida positiva com respeito a $\mathbb{P}$ para o qual, $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega'$, pode-se encontrar sequência de inteiros $n_k(\omega) \nearrow \infty$ tal que o limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k(\omega)} \log Z_\omega^{n_k(\omega)}(\phi, i, i),$$

existe e não depende do ponto $\omega \in \Omega'$ e do símbolo i com respeito aos quais é calculado. Com isto, pode-se introduzir a pressão de Gurevich como a seguir.

Definição 1.30. *A pressão de Gurevich de um potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ é definida, para $\omega \in \Omega'$, como o limite*

$$\Pi_G(\phi) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k(\omega)} \log Z_\omega^{n_k(\omega)}(\phi, i, i).$$

A partir do Teorema 3.4 de [St10], pode-se concluir que, se um potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ satisfaz as hipóteses (HL) e (HB), ocorre $\Pi_G(\phi) < \infty$. Enunciamos então versão do Princípio Variacional presente em [DKS08].

Teorema 1.31. *Sejam (Σ, Θ) um STFA topologicamente mixing e $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ um potencial aleatório satisfazendo as hipóteses (HB) e (HL). Então,*

$$\Pi_G(\phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \left\{h_\mu^{rel}(\Theta) + \int \phi \,\mathrm{d}\mu\right\}.$$

Outro resultado sobre o qual nos baseamos será o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius. Este teorema foi registrado na literatura de dinâmicas simbólicas aleatórias em formas sucessivamente mais gerais (ver, por exemplo, [BG95, Ki08]). Uma interessante demonstração deste resultado fazendo uso de técnicas de transporte ótimo foi obtida em [St17]. Consideramos abaixo uma adaptação de versão presente em [MSU10].

Teorema 1.32. *Sejam (Σ, Θ) um STFA topologicamente mixing e $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ um potencial aleatório satisfazendo as hipóteses (HB) e (HL). Então, são válidos os itens a seguir.*

(i) Existe uma única probabilidade $\nu = \{\nu_\omega\}$ em Σ tal que ω q.t.p. temos

$$(\mathcal{L}_\phi(\omega))^*\nu_{\theta\omega} = \lambda(\omega)\nu_\omega, \quad \textit{onde} \quad \lambda(\omega) = \int_{\Sigma(\omega)} \mathcal{L}_\phi(\omega)1 \,\mathrm{d}\nu_{\theta\omega}.$$

(ii) Existe um único potencial aleatório positivo $h \in \mathcal{H}(\Sigma)$ que para quase todo ω satisfaz

$$(\mathcal{L}_\phi(\omega)h)(\theta\omega, x) = \lambda(\omega)h(\theta\omega, x) \quad \textit{e} \quad \int_{\Sigma(\omega)} h(\omega, \cdot)\,\mathrm{d}\nu_\omega = 1.$$

Além disso, a autofunção h verifica ω q.t.p.

$$h(\omega, x) \leqslant h(\omega, y) \cdot B_\omega^{d(x,y)}, \quad \forall\, x, y \in \Sigma(\omega),\ d(x,y) \leqslant r,$$

e

$$\frac{1}{C_\phi(\omega)} \leqslant h(\omega, x) \leqslant C_\phi(\omega), \quad \forall\, x \in \Sigma(\omega),$$

onde

$$C_\phi(\omega) := B_{\theta^{-J(\omega)}\omega} \cdot \left(\prod_{i=0}^{J(\omega)-1} \ell(\theta^{-J(\omega)+i}\omega) \right) \cdot \exp\left(\max_{0 \leqslant k \leqslant J(\omega)} 2\|S_k\phi\|_{\theta^{-k}\omega} \right), \tag{1.2}$$

com B_ω como em (1.1) e $J(\omega)$ como no Lema 1.26.

(iii) A probabilidade μ dada pela desintegração $\{\mu_\omega = h(\omega, \cdot)\nu_\omega\}$ é Θ-invariante.

Para uma demonstração dos itens do teorema acima, o leitor pode consultar as Proposições 3.4 e 3.7 e os Lemas 3.9 e 3.11 de [MSU10].

É bem sabido na literatura de SDTs que, no contexto de uma dinâmica expansiva e de um potencial holderiano, a probabilidade $\mu = h\nu$ associada ao operador $\mathcal{L}_f$ é o único estado de equilíbrio para f, isto é, a probabilidade que realiza o supremo da definição da pressão. Tal fato também é conhecido para STFAs, como pode ser consultado, por exemplo, em [BG95, Proposição 4.8] ou em [KL06, Teorema 4.1.1]. Porém, tais resultados foram estabelecidos em contexto mais restritivo, no qual o espaço métrico X é compacto. Para apresentar uma demonstração de que μ é estado de equilíbrio também sob nosso conjunto de hipóteses, definimos primeiro o que é uma medida de Gibbs, assim como em [MSU10].

Definição 1.33. *Uma probabilidade $m \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é chamada de medida de Gibbs para $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ se existir função mensurável $G_\phi \colon \Omega \to [1, +\infty)$ tal que, para quase todo ω, para todo $n \geqslant 0$ e qualquer $x \in \Sigma(\omega)$, são verificadas as desigualdades*

$$(G_\phi(\omega)G_\phi(\theta^n\omega))^{-1} \leqslant \frac{m_\omega([x_0x_1 \ldots x_{n-1}]_\omega)}{\exp\left(S_n\phi(\omega, x) - S_n \log\lambda(\omega)\right)} \leqslant G_\phi(\omega)G_\phi(\theta^n\omega).$$

O Lema 3.28 de [MSU10] fornece a seguinte propriedade para a automedida ν: para quase todo ω e para quaisquer $x \in \Sigma(\omega)$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$D(\theta^n\omega)B_{\theta^n\omega}^{-1} \leqslant \frac{\nu_\omega\left([x_0x_1 \ldots x_{n-1}]_\omega\right)}{\exp\left(S_n\phi(\omega, x) - S_n(\log\lambda)(\omega)\right)} \leqslant B_{\theta^n\omega}, \tag{1.3}$$

onde $D(\omega) := \left(\exp(2\|S_{M(\omega)}\phi\|_\omega) \prod_{i=0}^{M(\omega)-1} \ell(\theta^i\omega) \right)^{-1} \leqslant 1.$

A fim de obter desigualdades similares para $\mu = h\nu$, consideramos o potencial aleatório $\tilde{\phi} := \phi + \log h - \log h \circ \Theta - \log \lambda$. Claramente $\tilde{\phi} \in \mathcal{H}(\Sigma)$. Observamos que o operador $\mathcal{L}_{\tilde{\phi}}$ está normalizado, ou seja, este satisfaz $\mathcal{L}_{\tilde{\phi}}(\omega)1 = 1$. Em particular, $\tilde{\phi}$ cumpre (HL). Além disso, observamos que $\tilde{\kappa}(\omega) \leqslant 2r^{-1} \log B_{\theta\omega}$, pois, dados $x, y \in \Sigma(\omega)$ com $d(x,y) \leqslant r^n$, com $n \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\omega,x) - \tilde{\phi}(\omega,y) &= \phi(\omega,x) - \phi(\omega,y) + \log\left(\frac{h(\omega,x)}{h(\omega,y)}\right) + \log\left(\frac{h(\theta\omega,\sigma y)}{h(\theta\omega,\sigma x)}\right) \\ &\leqslant \kappa(\omega)d(x,y) + \log(B_\omega)d(x,y) + \log(B_{\theta\omega})d(\sigma x,\sigma y) \\ &\leqslant \kappa(\omega)r^n + \sum_{k=1}^{\infty}\kappa(\theta^{-k}\omega)r^{k+n} + \sum_{k=1}^{\infty}\kappa(\theta^{-k+1}\omega)r^{k+n-1} = \frac{2\log B_{\theta\omega}}{r}r^n.\end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Lema 2.1 de [DKS08], o fato de $\tilde{\kappa}$ pertencer a $L^1(\mathbb{P})$ implica que a hipótese (HB) é cumprida para a variável aleatória $\tilde{B}_\omega$, associada ao potencial aleatório $\tilde{\phi}$ por (1.1).

A tripla associada ao operador $\mathcal{L}_{\tilde{\phi}}$ é composta pelo autovalor constante igual a 1, pela autofunção identicamente constante igual a 1 e pela automedida $\mu = h\nu$. Com efeito, $\mu = h\nu$ é o único ponto fixo do operador dual $\mathcal{L}^*_{\tilde{\phi}}$, pois, para qualquer $g \in C(\Sigma(\omega))$,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma(\omega)} g \,\mathrm{d}\mathcal{L}^*_{\tilde{\phi}}(\omega)\mu_{\theta\omega} &= \int_{\Sigma(\theta\omega)} h(\theta\omega,\cdot)\mathcal{L}_{\tilde{\phi}}(\omega)g \,\mathrm{d}\nu_{\theta\omega} = \frac{1}{\lambda(\omega)}\int_{\Sigma(\theta\omega)} \mathcal{L}_\phi(\omega)(h(\omega,\cdot)g)\,\mathrm{d}\nu_{\theta\omega} \\ &= \frac{1}{\lambda(\omega)}\int_{\Sigma(\omega)} h(\omega,\cdot)g\,\mathrm{d}\mathcal{L}^*_\phi(\omega)\nu_{\theta\omega} = \int_{\Sigma(\omega)} h(\omega,\cdot)g\,\mathrm{d}\nu_\omega = \int_{\Sigma(\omega)} g\,\mathrm{d}\mu_\omega.\end{aligned}$$

Ao aplicar as desigualdades (1.3) para $\tilde{\phi}$ e μ, obtemos

$$\tilde{D}(\theta^n\omega)\tilde{B}^{-1}_{\theta^n\omega} \leqslant \frac{\mu_\omega\left([x_0x_1...x_{n-1}]_\omega\right)}{\exp\left(S_n\tilde{\phi}(\omega,x) - S_n(\log 1)(\omega)\right)} \leqslant \tilde{B}_{\theta^n\omega}. \tag{1.4}$$

Recorde que, para quase todo ω, $\tilde{B}_\omega \geqslant 1$ e $\tilde{D}(\omega) \leqslant 1$. Assim, definindo $G(\omega) := B_\omega D^{-1}(\omega)$, podemos deduzir das desigualdades acima que

$$\left(G(\omega)G(\theta^n\omega)\right)^{-1} \leqslant \frac{\mu_\omega\left([x_0x_1...x_{n-1}]_\omega\right)}{\exp\left(S_n\tilde{\phi}(\omega,x)\right)} \leqslant G(\omega)G(\theta^n\omega), \tag{1.5}$$

o que mostra que μ é medida de Gibbs para $\tilde{\phi}$. Como veremos na proposição a seguir, a probabilidade μ é um estado de equilíbrio para ϕ. Tal proposição é baseada na Proposição 4.8 e no Teorema 4.11 de [BG95].

Proposição 1.34. *Sejam* (Σ, Θ) *um STFA topologicamente mixing,* $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ *um potencial aleatório satisfazendo as hipóteses (HB) e (HL) e* $\mu = h\nu$ *a probabilidade associada ao operador de transferência* $\mathcal{L}_\phi$*, como descrito no item (iii) do Teorema 1.32. Então,* μ *é um estado de equilíbrio para* ϕ*. Ademais,*

$$\Pi_G(\phi) = \int_\Omega \log \lambda \, d\mathbb{P}.$$

Demonstração. Dada uma palavra $c \in W_\omega^n$, há $x \in [c]_\omega$ que satisfaz

$$-\mu_\omega([c]_\omega) \log (\mu_\omega([c]_\omega) + \int_{[c]_\omega} S_n\tilde{\phi}(\omega, z) \, d\mu_\omega(z) \geqslant -\mu_\omega([c]_\omega) \left[\log (\mu_\omega([c]_\omega)) - S_n\tilde{\phi}(\omega, x)\right].$$

Utilizando a desigualdade (1.4), podemos minorar o lado direito da desigualdade acima por $-\mu([c]_\omega) \log \tilde{B}_{\theta^n\omega}$. Ao somar sobre todas as palavras $c \in W_\omega^n$ e dividir ambos os lados por n concluímos que

$$\frac{1}{n}\left[- \sum_{c \in W_\omega^n} \mu_\omega([c]_\omega) \log (\mu_\omega([c]_\omega)) + \int_{\Sigma(\omega)} S_n\tilde{\phi}(\omega, \cdot) \, d\mu_\omega\right] \geqslant -\frac{1}{n} \log \tilde{B}_{\theta^n\omega}.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade com respeito a $\mathbb{P}$ resulta que

$$\frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \Theta^{-i}(\mathcal{P}|\mathcal{F}_\Sigma)\right) + \int_\Sigma \tilde{\phi} \, d\mu \geqslant -\frac{1}{n} \int_\Omega \log \tilde{B}_\omega \, d\mathbb{P},$$

onde $\mathcal{P}$ denota a partição de X em cilindros de tamanho 1. Ao tomar limite em $n \to \infty$, concluímos que

$$h_\mu^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \tilde{\phi} \, d\mu \geqslant 0.$$

Observe então que, como $\int_\Sigma \tilde{\phi} \, d\mu = \int_\Sigma \phi \, d\mu - \int_\Omega \log \lambda \, d\mathbb{P}$, temos

$$h_\mu^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, d\mu \geqslant \int_\Omega \log \lambda \, d\mathbb{P}.$$

De posse do Princípio Variacional, a demonstração decorrerá de mostrar que para qualquer probabilidade $m \in \mathcal{M}_\mathbb{P}(\Sigma)$, ocorre

$$h_m^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, dm \leqslant \int_\Omega \log \lambda \, d\mathbb{P}.$$

Para tanto, recordamos que, dados dois vetores de probabilidade $(p_1, ..., p_k)$ e $(q_1, ..., q_k)$, com $p_i > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, então

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \log p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i \log q_i \leqslant 0, \tag{1.6}$$

sendo que a igualdade é válida se, e somente se, $q_i = p_i$ para todo i.

Fixado $\omega \in \Omega$, para $1 \leqslant i \leqslant \ell(\omega)$, definimos μ_ω-q.t.p. $x \in \Sigma(\omega)$

$$p_i(\omega, x) := \sum_{y \in \Sigma(\omega): \sigma y = \sigma x} \mathrm{e}^{\tilde{\phi}(\omega,y)} \chi_{[i]_\omega}(y) \qquad e \qquad q_i(\omega, x) := \mathbb{E}_{\mu_\omega}(\chi_{[i]_\omega} | \sigma^{-1}\mathcal{B})(x),$$

onde $\mathcal{B}$ denota a σ-álgebra dos borelianos de X e $\chi_{[i]_\omega}$ indica a função característica do cilindro $[i]_\omega$. Note que $p_i(\omega, x) = 0$ implica $q_i(\omega, x) = 0$ para μ_ω-q.t.p. $x \in \Sigma(\omega)$. De fato, ao definir o conjunto $C := \{x \in \Sigma(\omega) \mid p_i(\omega, x) = 0\} = \big\{x \in \Sigma(\omega) \mid \sigma^{-1}(\sigma x) \cap [i]_\omega = \varnothing\big\}$, temos

$$\int_{\sigma^{-1}(\sigma C)} \mathbb{E}_{\mu_\omega}(\chi_{[i]_\omega} | \sigma^{-1}(\mathcal{B}))(x)\, \mathrm{d}\mu_\omega = \int_{\sigma^{-1}(\sigma C)} \chi_{[i]_\omega}(x)\, \mathrm{d}\mu_\omega = \mu_\omega(\sigma^{-1}(\sigma C) \cap [i]_\omega) = 0.$$

Supondo $p_i(\omega, x) > 0$, temos então que

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma(\omega)} \sum_{i=1}^{\ell(\omega)} q_i(\omega, x) \log p_i(\omega, x) \mathrm{d}m_\omega &= \sum_{i=1}^{\ell(\omega)} \int_{\Sigma(\omega)} \mathbb{E}_{\mu_\omega}(\chi_{[i]_\omega} | \sigma^{-1}\mathcal{B})(x) \log \sum_{\substack{y \in \Sigma(\omega) \\ \sigma y = \sigma x}} \mathrm{e}^{\tilde{\phi}(\omega,y)} \chi_{[i]_\omega}(y) \mathrm{d}m_\omega \\
&= \sum_{i=1}^{\ell(\omega)} \int_{[i]_\omega} \log \sum_{\substack{y \in \Sigma(\omega) \\ \sigma y = \sigma x}} \mathrm{e}^{\tilde{\phi}(\omega,y)} \chi_{[i]_\omega}(y)\, \mathrm{d}m_\omega \\
&= \sum_{i=1}^{\ell(\omega)} \int_{[i]_\omega} \tilde{\phi}(\omega, i\sigma x)\, \mathrm{d}m_\omega = \int_{\Sigma(\omega)} \tilde{\phi}\, \mathrm{d}m_\omega,
\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade vem do fato que $\tilde{\phi}(\omega, x) = \sum_{i=1}^{\ell(\omega)} \tilde{\phi}(\omega, i\sigma x) \chi_{[i]_\omega}(x)$, onde $i\sigma x$ denota a concatenação do símbolo i com o ponto σx. Por outro lado,

$$-\int_{\Sigma(\omega)} \sum_{i=1}^{\ell(\omega)} q_i(\omega, x) \log q_i(\omega, x)\, \mathrm{d}m_\omega = H_{m_\omega}(\mathcal{P} | \sigma^{-1}\mathcal{B}).$$

Logo, aplicando a desigualdade (1.6), obtemos

$$H_{m_\omega}(\mathcal{P}|\sigma^{-1}\mathcal{B}) + \int_{\Sigma(\omega)} \tilde{\phi}\, \mathrm{d}m_\omega \leqslant 0.$$

Como $\mathcal{P}$ é partição geradora de $\mathcal{B}$, integrando a desigualdade acima com respeito a $\mathbb{P}$ resulta

$$h_m^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \tilde{\phi}\, \mathrm{d}m \leqslant 0.$$

Porém, como m é invariante pela dinâmica, $\int_\Sigma \tilde{\phi}\, \mathrm{d}m = \int_\Sigma \phi\, \mathrm{d}m - \int_\Sigma \log\lambda\, \mathrm{d}m$. Portanto, concluímos que

$$h_m^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi\, \mathrm{d}m \leqslant \int_\Sigma \log\lambda\, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

□

Para conveniência do leitor, concluímos esta seção com um resumo dos resultados do formalismo termodinâmico que utilizamos como base para nossa proposta de versão aleatória de otimização ergódica.

Teorema 1.35. *Seja (Σ, Θ) um STFA topologicamente mixing. Considere $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ um potencial aleatório satisfazendo as hipóteses (HL) e (HB). Então*

(a) Existe uma única tripla (λ, h, ν), com $\lambda(\omega) > 0$ variável aleatória, h e ν autofunção positiva e automedida do operador de transferência $\mathcal{L}_\phi$ e seu operador dual $\mathcal{L}_\phi^*$, respectivamente, tais que, para quase todo ω

$$\left(\mathcal{L}_\phi(\omega)h\right)(\theta\omega, x) = \lambda(\omega)h(\theta\omega, x), \quad \mathcal{L}_\phi^*(\omega)\nu_{\theta\omega} = \lambda(\omega)\nu_\omega,$$

onde

$$\lambda(\omega) = \int_{\Sigma(\omega)} (\mathcal{L}_\phi(\omega)1)(\theta\omega, x)\, \mathrm{d}\nu_{\theta\omega}(x) \quad e \quad \int_\Omega \int_{\Sigma(\omega)} h(\omega, x)\, \mathrm{d}\nu_\omega(x)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = 1.$$

(b) O potencial aleatório $\log h$ pertence ao conjunto $\mathcal{H}(\Sigma)$, valendo $var_\omega^n(\log h) \leqslant B_\omega r^n$, $\forall\, n \geqslant 1$. Além disso, existe variável aleatória $C_\phi(\omega) > 1$, dependendo unicamente de ϕ, tal que, para quase todo ω, $\|\log h\|_\omega \leqslant \log C_\phi(\omega)$. Mais precisamente,

$$C_\phi(\omega) := B_{\theta^{-J(\omega)}\omega} \cdot \left(\prod_{i=0}^{J(\omega)-1} \ell(\theta^{-J(\omega)+i}\omega) \right) \cdot \exp\left(\max_{0 \leqslant k \leqslant J(\omega)} 2\|S_k\phi\|_{\theta^{-k}\omega} \right),$$

onde $B_\omega \geqslant 1$ *foi definido em (1.1) e* $J(\omega)$ *foi definido no Lema 1.26.*

(c) O Princípio Variacional garante que

$$\Pi_G(\phi) = \sup_{m \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \left\{ h_m^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, \mathrm{d}m \right\}.$$

(d) A probabilidade $\mu = h\nu$ *é estado de equilíbrio para* ϕ *e ocorrem as igualdades*

$$h_\mu^{rel}(\Theta) + \int_\Sigma \phi \, \mathrm{d}\mu = \Pi_G(\phi) = \int_\Omega \log \lambda \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

2 Consequências do formalismo termodinâmico em temperatura zero

Consideramos aqui um STFA topologicamente *mixing*, no sentido das definições 1.24 e 1.25. Estamos interessados em estudar probabilidades maximizantes associadas a potenciais aleatórios localmente holderianos, introduzidos pela definição 1.27. No decorrer deste capítulo, vamos empregar os resultados conhecidos do formalismo termodinâmico sobre este modelo de dinâmica para estabelecer versão de teoria de otimização ergódica em contexto aleatório.

2.1 Caracterizações da constante ergódica maximal

Nesta seção, focamos no problema de caracterizar a constante ergódica maximal de um potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$. Iniciamos colocando em evidência a relação entre $\beta(\phi)$ e o autovalor aleatório maximal do operador de transferência $\mathcal{L}_\phi$. Para tanto, fazemos uso do processo de congelamento do sistema como apresentado em [Sa99, CLT01]. Recordamos que tal processo consiste em multiplicar o potencial aleatório ϕ por um parâmetro t, o qual possui interpretação física como o inverso da temperatura absoluta, e em analisar (na escala adequada) o comportamento assintótico da tripla associada ao operador de transferência $\mathcal{L}_\phi$, constituída pelo autovalor maximal e pelas autofunção e automedida correspondentes.

No último capítulo de [MSU10], os autores fazem estudo da analiticidade da função $t \mapsto \Pi_G(t\phi)$. Como é bem sabido, em formalismo termodinâmico, a perda da analiticidade desta função é interpretada como transição de fase. A estratégia empregada no estudo passa por observar a dependência em t da tripla associada ao operador de transferência $\mathcal{L}_{t\phi}$. Em particular, denotando por $B_{\omega,t}$ a variável aleatória introduzida por (1.1) para o potencial $t\phi$, lá conclui-se que $B_{\omega,t} \leqslant [B_\omega]^t$ e $C_{t\phi}(\omega) \leqslant [C_\phi(\omega)]^t$.

Recorde que todo potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ satisfazendo as hipóteses (HL) e (HB) possui pressão de Gurevich finita. Em particular, como consideramos apenas potenciais aleatórios de módulo integrável com respeito a $\mathbb{P}$, temos $\sup_{m \in \mathcal{M}_\mathbb{P}(\Sigma)} h_m^{rel}(\Theta) < \infty$.

Com efeito, pelo Princípio Variacional,

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} h_{\mu}^{rel}(\Theta) - \int_{\Omega} \|\phi\|_{\omega} \, d\mathbb{P} \leqslant \Pi_G(\phi) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} h_{\mu}^{rel}(\Theta) \leqslant \Pi_G(\phi) + \int_{\Omega} \|\phi\|_{\omega} \, d\mathbb{P} < \infty.$$

No caso determinístico, a constante ergódica maximal de um potencial holderiano f está relacionada com a pressão topológica do potencial tf através do limite $\beta(f) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log P(tf)$, como observado, por exemplo, em [CG93, Sa99, CLT01]. Não é surpreendente que este resultado se generalize para o caso aleatório. Na proposição abaixo, apresentamos uma prova desse fato.

Proposição 2.1. *Seja $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ um potencial aleatório satisfazendo as hipóteses (HL) e (HB). Então,*

$$\beta(\phi) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \log \lambda_t \, d\mathbb{P}.$$

Demonstração. Seja $C > 0$ constante tal que $\sup_{m \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} h_m^{rel}(\Theta) \leqslant C$. Então, para qualquer $t > 0$,

$$\Pi_G(t\phi) = \sup_{m \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \left\{ h_m^{rel}(\Theta) + \int t\phi \, dm \right\} \leqslant C + t\beta(\phi).$$

Por outro lado, quando $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^{max}(\phi)$, ocorre

$$h_{\nu}^{rel}(\Theta) + t\beta(\phi) = h_{\nu}^{rel}(\Theta) + \int_{\Omega} t\phi \, d\nu \leqslant \sup_{m \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \left\{ h_m^{rel}(\Theta) + \int t\phi dm \right\} = \Pi_G(t\phi).$$

Das duas desigualdade acima, resulta que

$$0 \leqslant \Pi_G(t\phi) - t\beta(\phi) < C.$$

Utilizando a caracterização do item (d) do Teorema 1.35, $\Pi_G(t\phi) = \int_{\Omega} \log \lambda_t \, d\mathbb{P}$, basta dividir a desigualdade por t e fazer $t \to \infty$ para concluir que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \log \lambda_t \, d\mathbb{P} = \beta(\phi).$$

□

O processo de congelamento do sistema nos permite obter probabilidade maximizante para o potencial aleatório ϕ. Tal fato é bem conhecido no caso determinístico, como o leitor pode verificar, por exemplo, no Teorema 3.2 de [CG93] ou na Proposição 29 de [CLT01].

Proposição 2.2. *Suponha que* $\log \ell \in L^1(\mathbb{P})$. *Seja* $\{\mu_t = h_t \nu_t\}$ *a família formada pelos estados de equilíbrio associados a* $t\phi$, $t > 0$. *Então, qualquer ponto de aderência da família* $\{\mu_t\}$ *é uma probabilidade maximizante para* ϕ *que apresenta entropia máxima entre as maximizantes.*

Demonstração. Temos que, pelo Teorema 1.35,

$$h_{\mu_t}^{rel}(\Theta) + \int t\phi \, \mathrm{d}\mu_t = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \left\{ h_{\nu}^{rel}(\Theta) + \int t\phi \, \mathrm{d}\nu \right\} = \Pi_G(t\phi).$$

Além disso, a existência de ao menos um ponto de aderência da família $\{\mu_t\}$ está garantida, vide observação 1.6.

Seja t_n sequência crescente tal que $\mu_{t_n} \to \mu$. Da igualdade

$$\frac{1}{t_n} h_{\mu_{t_n}}^{rel}(\Theta) + \int \phi \, \mathrm{d}\mu_{t_n} = \frac{1}{t_n} \Pi_G(t_n \phi) = \frac{1}{t_n} \int \log \lambda_{t_n} \, \mathrm{d}\mathbb{P},$$

ao fazer $n \to \infty$, resulta que

$$\int \phi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n} \left[h_{\mu_{t_n}}^{rel}(\Theta) + \int t_n \phi \, \mathrm{d}\mu_{t_n} \right] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n} \int_{\Omega} \log \lambda_{t_n} \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \beta(\phi).$$

Por outro lado, para $m \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^{max}(\phi)$, temos

$$h_m^{rel}(\Theta) + t\beta(\phi) = h_m^{rel}(\Theta) + \int t\phi \, \mathrm{d}m \leqslant \Pi_G(t\phi) = h_{\mu_t}^{rel}(\Theta) + \int t\phi \, \mathrm{d}\mu_t.$$

Como $\int \phi \, \mathrm{d}\mu_t \leqslant \beta(\phi)$, segue que $h_m^{rel}(\Theta) \leqslant h_{\mu_t}^{rel}(\Theta)$, $\forall\, t \geqslant 1$. Em particular, recordando que a expansividade de (Σ, Θ) assegura que a aplicação $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Sigma) \mapsto h_{\nu}^{rel}$ é semicontínua superiormente, concluímos que μ possui entropia máxima em $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}^{max}(\phi)$. □

Também utilizando o processo congelamento do sistema vamos obter uma função aleatória que generaliza o conceito de subação para um SDA. Antes de introduzir o que vem a ser uma subação aleatória precisamos de resultados preliminares.

Uma vez que para quase todo $\omega \in \Omega$ a autofunção $h_t(\omega, \cdot)$ é positiva na fibra $\Sigma(\omega)$, a menos de um conjunto de medida nula para $\mathbb{P}$ podemos escrever que

$$h_t(\omega, x) = \mathrm{e}^{-tu_t(\omega,x)} \quad \Leftrightarrow \quad u_t(\omega, x) = -\frac{1}{t}\log h_t(\omega, x). \tag{2.1}$$

Lema 2.3. *Para quase todo ω, as funções u_t definidas em (2.1) são equicontínuas e equilimitadas sobre as fibras $\Sigma(\omega)$.*

Demonstração. Pelo item (b) do Teorema 1.35, a autofunção do operador de transferência associado ao potencial aleatório ϕ satisfaz

$$h(\omega, x) \leqslant h(\omega, y) \cdot B_\omega^{d(x,y)}, \quad \forall\, x, y \in \Sigma(\omega),\ d(x, y) \leqslant r,$$

e

$$\frac{1}{C_\phi(\omega)} \leqslant h(\omega, x) \leqslant C_\phi(\omega), \quad \forall\, x \in \Sigma(\omega),$$

onde $C_\phi(\omega)$ é dado pela equação (1.2). Daí, como mencionado no início desta seção, ao multiplicar ϕ pelo parâmetro $t > 0$, é observado em [MSU10] que

$$B_{\omega,t} \leqslant [B_\omega]^t \quad e \quad C_{t\phi}(\omega) \leqslant [C_\phi(\omega)]^t.$$

Dessas desigualdades resulta que as funções u_t satisfazem equilimitação e equicontinuidade, pois, para quase todo ω e para quaisquer $x, y \in \Sigma(\omega)$ com $d(x, y) \leqslant r$, temos

$$|u_t(\omega, x) - u_t(\omega, y)| \leqslant \log B_\omega \cdot d(x, y) \quad e \quad -\log C_\phi(\omega) \leqslant u_t(\omega, x) \leqslant \log C_\phi(\omega), \quad \forall\, t > 0.$$

$\square$

Dado potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ satisfazendo as hipóteses (HL) e (HB), recorde que podemos normalizar o operador de transferência ao considerar o potencial aleatório $\tilde{\phi} = \phi + \log h - \log h \circ \Theta - \log \lambda$, obtendo, em particular, $\mathcal{L}_{\tilde{\phi}}(\omega)1 = 1$. Trocando ϕ por $t\phi$, com $t > 0$, denotamos então $\tilde{t\phi} := t\phi + \log h_t - \log h_t \circ \Theta - \log \lambda_t$. Observamos que, para quase todo ω e para todo $x \in \Sigma(\omega)$, a normalização do operador de transferência $\mathcal{L}_{\tilde{t\phi}}$ pode ser apresentada da seguinte forma

$$\sum_{\substack{y \in \Sigma(\omega) \\ \sigma y = x}} \exp\left(t\phi(\omega, y) - \log \lambda_t(\omega) - tu_t(\omega, y) + tu_t \circ \Theta(\omega, y)\right) = 1. \tag{2.2}$$

Como a soma de exponenciais em (2.2) é igual a 1, temos como consequência a desigualdade

$$\frac{1}{t}\log\lambda_t(\omega) \leqslant \frac{1}{t}\log\ell(\omega) + \|\phi\|_\omega + \log C_\phi(\omega) + \log C_\phi(\theta\omega). \tag{2.3}$$

Com efeito, a equação (2.2) equivale a $\sum_{\substack{y\in\Sigma(\omega)\\ \sigma y=x}} \exp t\big(\phi(\omega,y) - u_t(\omega,y) + u_t\circ\Theta(\omega,y)\big) = \lambda_t(\omega)$. Da prova do Lema 2.3, temos que $\|u_t(\theta^j\omega,\cdot)\|_\omega \leqslant \log C_\phi(\theta^j\omega)$. Ademais, o número de termos desse somatório está limitado por $\ell(\omega)$. Logo, o resultado é obtido ao se aplicar o logaritmo e dividir por t em ambos os lados de $\lambda_t(\omega) \leqslant \ell(\omega)\exp\Big[t\big(\|\phi\|_\omega + \log C_\phi(\omega) + \log C_\phi(\theta\omega)\big)\Big]$. Uma outra constatação direta da equação (2.2) é que cada expoente das exponenciais é negativo, donde

$$\phi(\omega,y) + u_t\circ\Theta(\omega,y) - u_t(\omega,y) < \frac{1}{t}\log\lambda_t(\omega), \quad \forall\, y\in\Sigma(\omega). \tag{2.4}$$

A partir da caracterização de $\beta(\phi)$ obtida na Proposição 2.1 e da equicontinuidade e equilimitação da família de potenciais $u_t(\omega,\cdot)$ apresentada no Lema 2.3, é sugerível procurar passar ao limite em t na desigualdade (2.4) a fim de obter potencial que desempenhe o papel de subação para ϕ. Porém, como uma tal passagem ao limite se daria essencialmente fibra a fibra, não parece haver por ora garantia de resultar mensurabilidade do limite com respeito a ω. Portanto, evitaremos entrar agora em tais dificuldades técnicas e veremos como a desigualdade (2.4) nos auxilia a obter novas caracterizações para $\beta(\phi)$.

A seguir, descrevemos $\beta(\phi)$ via médias de Birkhoff, revisitando para o caso aleatório, quando $\phi\in\mathcal{H}(\Sigma)$, as caracterizações presentes, por exemplo, em [CG93, Teorema 2.1] e em [Je06, Proposição 2.1]. Como mencionado anteriormente, uma tal descrição se encontra registrada na literatura, por exemplo, em [Cr02, Proposição 6.21]. Propomos aqui uma demonstração alternativa para este resultado. Na demonstração utilizaremos um lema bem conhecido na literatura de teoria ergódica, o qual deixamos enunciado abaixo para a conveniência do leitor.

Lema 2.4. *Seja $\Xi\colon\Omega\to\mathbb{R}$ uma variável aleatória integrável. Então,*

$$\frac{\Xi\circ\theta^n}{n} \to 0, \quad \textit{quando} \quad n\to\infty.$$

Para uma demonstração deste lema, o leitor pode consultar, por exemplo, a prova do Lema 2 de [AB09] ou a do Corolário A.6 de [Th87].

Lema 2.5. *Dados um STFA (Σ,Θ) e $\phi\in\mathcal{H}(\Sigma)$ satisfazendo as hipóteses (HL) e (HB),* *para quase todo $\omega \in \Omega$, vale que*

$$\beta(\phi) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x) = \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x).$$

Demonstração. Considere ω q.t.p.

$$\beta_\omega^n(\phi) := \max_{x\in\Sigma(\omega)} S_n\phi(\omega, x).$$

Uma vez que Σ admite seleção mensurável (ver, por exemplo, Teorema III.7 de [CV77]), não é difícil argumentar que $\beta_\omega^n(\phi)$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$\beta_\omega^{n+m}(\phi) \leqslant \beta_\omega^m(\phi) + \beta_{\theta^m\omega}^n(\phi).$$

Assim, pelo Lema Subaditivo de Fekete, para quase todo ω existe o limite

$$\beta_\omega(\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\beta_\omega^n(\phi) = \inf_n \frac{1}{n}\beta_\omega^n(\phi),$$

o qual define uma função mensurável sobre Ω. Observe que podemos estimar a diferença

$$\begin{aligned}\left|\beta_{\theta\omega}(\phi) - \beta_\omega(\phi)\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left| \max_{x\in\Sigma(\theta\omega)} S_n\phi(\theta\omega, x) - \max_{y\in\Sigma(\omega)} S_n\phi(\omega, y)\right| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{y\in\Sigma(\omega)} \left|\phi(\theta^{n+1}\omega, \sigma^{n+1}y) - \phi(\omega, y)\right|.\end{aligned}$$

Além disso, de $|\beta_\omega^n(\phi)| \leqslant \|\phi\|_\omega + \cdots + \|\phi\circ\Theta^{n-1}\|_{\theta^{n-1}\omega}$ temos $\left|\int_\Omega \beta_\omega^n(\phi)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\right| \leqslant n\int_\Omega \|\phi\|_\omega\,\mathrm{d}\mathbb{P}$. Logo, utilizando o Lema 2.4 e a ergodicidade de θ com respeito a $\mathbb{P}$, concluímos que $\beta_\omega(\phi)$ é uma função constante para quase todo ω. Sejam então $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^{max}(\phi)$ e $\tilde{\phi}$ o potencial aleatório dado pelo Teorema de Birkhoff, $\tilde{\phi}(\omega, x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x)$, o qual está definido (ω, x) $\mu - q.t.p.$ Temos que

$$\beta(\phi) = \int_\Sigma \phi\,\mathrm{d}\mu = \int_\Sigma \tilde{\phi}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega\int_{\Sigma(\omega)} \tilde{\phi}\,\mathrm{d}\mu_\omega\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega\int_{\Sigma(\omega)} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} S_n\phi\,\mathrm{d}\mu_\omega\mathrm{d}\mathbb{P}$$

$$\leqslant \int_\Omega\int_{\Sigma(\omega)} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\beta_\omega^n\,\mathrm{d}\mu_\omega\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \beta_\omega(\phi)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \beta_\omega(\phi), \quad \omega\ q.t.p.$$

Recorde que λ_t depende apenas de ω. Fixamos uma sequência crescente $t_j \to \infty$ e tomamos ponto $\omega \in \Omega$ que é simultaneamente regular, no sentido do Teorema de Birkhoff, para cada uma das funções $\log \lambda_{t_j}$, mais precisamente, consideramos ω tal que

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(\log \lambda_{t_j})(\omega) = \int_\Omega \log \lambda_{t_j}\, d\mathbb{P}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $\{x_n(\omega)\} \subset \Sigma(\omega)$ sequência satisfazendo

$$\beta_\omega^n(\phi) = S_n\phi(\omega, x_n(\omega)).$$

Decorre da desigualdade (2.4) que

$$\frac{1}{n}\beta_\omega^n(\phi) + \frac{(u_{t_j} \circ \Theta^{n+1} - u_{t_j})(\omega, x_n(\omega))}{n} < \frac{1}{n} S_n \left(\frac{1}{t_j} \log \lambda_{t_j} \right)(\omega).$$

Uma vez que, pelo Lema 2.3, as funções $u_t(\omega, \cdot)$ são equilimitadas $\mathbb{P}$-q.t.p. com respeito a t, podemos definir

$$\Omega_C := \{\omega \in \Omega \mid \|u_t\|_\omega < C,\ \forall\, t > 0\},$$

com $\mathbb{P}(\Omega_C) > 0$. Da ergodicidade de θ, resulta que para quase todo ω há sequência n_k tal que $\theta^{n_k}\omega \in \Omega_C$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Disto concluímos que

$$\frac{1}{n_k}\beta_\omega^{n_k}(\phi) - \frac{2C}{n_k} < \frac{1}{n_k} S_{n_k}\Big(\frac{1}{t_j}\log \lambda_{t_j}\Big)(\omega), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ao fazer $k \to \infty$, temos então que

$$\beta_\omega(\phi) \leqslant \int_\Omega \frac{1}{t_j} \log \lambda_{t_j}\, d\mathbb{P}, \quad \omega\ \mathbb{P} - q.t.p. \tag{2.5}$$

Graças à Proposição 2.1, podemos tomar o limite em j para concluir que $\beta_\omega(\phi) \leqslant \beta(\phi)$. Das duas desigualdades resulta, ω q.t.p.,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x) = \beta_\omega(\phi) = \beta(\phi).$$

Para obter a outra igualdade, observe que, se $\mu \in \mathcal{M}_\mathbb{P}^{max}(\phi)$ é uma probabilidade ergódica, pelo Teorema de Birkhoff, para $(\omega, \bar{x})$ μ-q.t.p., temos

$$\beta(\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, \bar{x}) \leqslant \sup_{x\in\Sigma(\omega)} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x).$$

Por outro lado, pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$, há $\bar{x} \in \Sigma(\omega)$ tal que

$$\sup_{x\in\Sigma(\omega)} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, x) - \varepsilon \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\phi(\omega, \bar{x}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\beta_\omega^n(\phi) = \beta(\phi),$$

onde a última igualdade é válida ω q.t.p. pela argumentação acima. Resta fazer $\varepsilon \to 0$

para obter o resultado. □

A partir da desigualdade (2.5) na prova do lema anterior, podemos concluir que, assim como nos sistemas dinâmicos topológicos,

$$\beta(\phi) = \inf_t \frac{1}{t} \int_\Omega \log \lambda_t \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Como pode ser visto, por exemplo, em [BLL11, Proposição 2.11], no contexto de um *full shift* topológico e um potencial holderiano f, o gráfico da pressão topológica $P(tf)$, em função do parâmetro t, possui assíntota $t\beta(f)$ quando $t \to \infty$. Desse comportamento assintótico da pressão pode-se discutir, como fizeram os autores do referido trabalho, quais são as probabilidades maximizantes para f obtidas em situações particulares como limites de μ_t quando $t \to \infty$.

Dando continuidade às caracterizações da constante ergódica maximal $\beta(\phi)$, vamos obter um Teorema de dualidade, generalizando aquele presente em [CG93, Teorema 2.2], para o caso em que $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$.

Teorema 2.6. *Sejam (Σ, Θ) um STFA e $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ um potencial aleatório satisfazendo (HL) e (HB). Temos que*

$$\beta(\phi) = \inf_{v \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)} \int_\Omega \sup_{x \in \Sigma(\omega)} [\phi(\omega, x) + v(\theta\omega, \sigma x) - v(\omega, x)] \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Demonstração. Vamos utilizar a notação

$$\gamma_\omega(\phi, v) := \max_{x \in \Sigma(\omega)} [\phi + v \circ \Theta - v](\omega, x).$$

Uma das desigualdades é trivial, pois, para qualquer $v \in C(\Sigma)$,

$$\gamma_\omega(\phi, v) \geqslant \phi + v \circ \Theta - v.$$

Então, sempre que integramos a desigualdade acima com respeito a uma probabilidade maximizante $\mu \in \mathcal{M}^{max}_{\mathbb{P}}(\phi)$, temos

$$\int_\Omega \gamma_\omega(\phi, v) \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geqslant \beta(\phi).$$

Basta agora tomar o ínfimo em v do lado esquerdo.

Para obter a outra desigualdade, definimos

$$v_N(\omega, x) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n\phi(\omega, x).$$

Temos que

$$\begin{aligned} [\phi + v_N \circ \Theta - v_N](\omega, x) &= \phi(\omega, x) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n\phi(\theta\omega, \sigma x) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n\phi(\omega, x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n\phi(\theta\omega, \sigma x) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} S_n\phi(\theta\omega, \sigma x) \\ &= \frac{1}{N} S_N\phi(\theta\omega, \sigma x) = \frac{1}{N} S_N\phi \circ \Theta(\omega, x). \end{aligned}$$

Consequentemente, mantidas as notações da prova do Lema 2.5,

$$\gamma_\omega(\phi, v_N) = \frac{1}{N} \beta_\omega^N(\phi \circ \Theta).$$

Assim, pelo lema anterior, para quase todo ω, $\gamma_\omega(\phi, v_N)$ converge para $\beta(\phi \circ \Theta)$ quando $N \to \infty$. Portanto, empregando o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman,

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \gamma_\omega(\phi, v_N)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{N} \beta_\omega^N(\phi \circ \Theta)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \beta_\omega(\phi \circ \Theta)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \beta(\phi \circ \Theta) = \beta(\phi).$$

Em particular, dado $\varepsilon > 0$, existe N_0 suficientemente grande tal que

$$\int_\Omega \gamma_\omega(\phi, v_{N_0})\, \mathrm{d}\mathbb{P} < \beta(\phi) + \varepsilon.$$

Então,

$$\inf_{v\in C(\Sigma)} \int_\Omega \gamma_\omega(\phi, v) < \beta(\phi) + \varepsilon,$$

donde obtemos a outra desigualdade ao fazer $\varepsilon \to 0$. □

Note que este Teorema de dualidade generaliza aquele do caso determinístico quando $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$, pois, nesse contexto, $\mathbb{P}$ se reduz a uma delta de Dirac sobre um ponto fixo ω_0. Dessa forma, a integração aqui presente, no caso determinístico, consistiria apenas em avaliar o valor de γ_{ω_0}.

2.2 Uma generalização do conceito de subação aleatória

Uma vez obtidas as caracterizações da constante ergódica maximal $\beta(\phi)$, nosso objetivo será propor noção de subação aleatória e garantir sua existência. É natural pensar que, na desigualdade cohomológica da subação aleatória, no lugar da constante ergódica maximal, figurará uma variável aleatória cuja média com respeito a $\mathbb{P}$ resulta em $\beta(\phi)$.

Definição 2.7. *Dizemos que uma função aleatória u é uma subação aleatória para o potencial aleatório ϕ se existir uma variável aleatória $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, com $\int_\Omega \psi \, d\mathbb{P} = \beta(\phi)$, chamada de valor ergódico maximal aleatório, para a qual vale a desigualdade*

$$\phi(\omega, x) + u \circ \Theta(\omega, x) - u(\omega, x) \leqslant \psi(\omega), \quad \omega - q.t.p., \ \forall \, x \in \Sigma(\omega).$$

Uma subação aleatória será chamada de calibrada se para quase todo ω verificar a igualdade

$$u(\theta\omega, x) = \min_{\substack{y \in \Sigma(\omega) \\ \sigma y = x}} [u(\omega, y) - \phi(\omega, y) + \psi(\omega)], \quad \forall \, x \in \Sigma(\omega).$$

Claramente a definição de subação aleatória generaliza o conceito de subação dos SDT's. Caso $\mathbb{P} = \delta_\omega$, só há uma fibra a considerar (exatamente a fibra $\Sigma(\omega)$) e, nessa situação, basta tomar $\psi \equiv \beta(\phi)$. Faremos a seguir a construção de um candidato a subação aleatória para um potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ satisfazendo (HL) e (HB).

Considere um conjunto $\mathcal{E} \subset \Omega$ tal que, para todo $\omega \in \Omega$, existe um único $\omega_\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ com $\omega = \theta^j \omega_\mathcal{E}$, para algum $j \in \mathbb{Z}$. Particionamos o conjunto $\mathcal{E}$ em conjuntos enumeráveis $\mathcal{E}_\alpha := \{\omega_0, \omega_1, ...\}$. Como as funções aleatórias u_t e as variáveis aleatórias λ_t estão necessariamente definidas $\mathbb{P}$-q.t.p., desconsideraremos elementos $\omega \in \mathcal{E}$ cujas órbitas estejam contidas em conjunto de medida nula sobre o qual u_t ou λ_t não estão definidas. Levando esta observação em conta, fixamos $\mathcal{E}_\alpha = \{\omega_0, \omega_1, ...\} \subset \mathcal{E}$. Pelo Lema 2.3, temos que $\{u_t(\omega_0, \cdot)\}$ é uma família equicontínua e equilimitada de funções, de modo que podemos aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli para obter sequência $\{t_n(\alpha)\}$ da qual resulta o limite uniforme

$$u_\mathcal{E}(\omega_0, \cdot) = \lim_{n \to \infty} u_{t_n(\alpha)}(\omega_0, \cdot).$$

Obviamente, podemos escolher subsequência, ainda denotando-a por $\{t_n(\alpha)\}$, para a qual existe o limite $u_\mathcal{E}(\theta^j \omega_i, \cdot) = \lim_{n \to \infty} u_{t_n(\alpha)}(\theta^j \omega_i, \cdot)$, para índices $i \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$ fixados. Mais ainda, por argumento diagonal, extraímos subsequência $\{t_{n_k}(\alpha)\}$, tal que

$$u_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i, x) = \lim_{k\to\infty} u_{t_{n_k}(\alpha)}(\theta^j\omega_i, x), \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}, \forall\, i \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \Sigma(\theta^j\omega_i).$$

Definimos então

$$\Lambda_{\mathcal{E}}^{inf}(\theta^j\omega_i) := \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{t_{n_k}(\alpha)} \log \lambda_{t_{n_k}(\alpha)}(\theta^j\omega_i),$$

$$\Lambda_{\mathcal{E}}^{sup}(\theta^j\omega_i) := \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{t_{n_k}(\alpha)} \log \lambda_{t_{n_k}(\alpha)}(\theta^j\omega_i).$$

Note que o limite superior acima está bem definido devido à desigualdade (2.3). Denotaremos por $\{t_{n_k}^{inf}(\alpha, i, j)\}$ e $\{t_{n_k}^{sup}(\alpha, i, j)\}$ as subsequências sobre as quais passagem ao limite fornece, respectivamente, o limite inferior e o limite superior nas definições de $\Lambda_{\mathcal{E}}^{inf}(\theta^j\omega_i)$ e $\Lambda_{\mathcal{E}}^{sup}(\theta^j\omega_i)$. Naturalmente, esse procedimento, ao se variar o conjunto $\mathcal{E}_\alpha$, permite definir funções $u_{\mathcal{E}}$ e $\Lambda_{\mathcal{E}}^*$, com $* \in \{inf, sup\}$, para um conjunto de massa total em Ω.

Ainda que as funções limites construídas acima possam não satisfazer mensurabilidade com respeito a σ-álgebra $\mathcal{F}$, a proposição abaixo garante propriedade de calibração orbital. Além disso, concluiremos que está bem definido o limite $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_{n_k}(\alpha)} \log \lambda_{t_{n_k}(\alpha)}(\theta^j\omega_i)$.

Proposição 2.8. *A função aleatória $u_{\mathcal{E}}$ definida acima satisfaz, para quase todo ω,*

$$u_{\mathcal{E}}(\theta\omega, x) = \min_{\substack{y\in\Sigma(\theta\omega)\\ \sigma y = x}} \big[u_{\mathcal{E}}(\omega, y) - \phi(\omega, y)\big] + \Lambda_{\mathcal{E}}(\omega), \quad \forall\, x \in \Sigma(\theta\omega),$$

onde $\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_{n_k}(\alpha)} \log \lambda_{t_{n_k}(\alpha)}(\omega)$, *$\mathbb{P}$-q.t.p.*

Demonstração. A prova de que $\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega)$ está bem definido como limite sobre as sequências $\{t_{n_k}(\alpha)\}$ seguirá ao se concluir que $u_{\mathcal{E}}(\theta\omega, x) = \min_{\substack{y\in\Sigma(\theta\omega)\\ \sigma y = x}} \big[u_{\mathcal{E}}(\omega, y) - \phi(\omega, y)\big] + \Lambda_{\mathcal{E}}^\star(\omega)$, com $\star \in \{inf, sup\}$. Isto porque a diferença entre colchetes não depende de $\star$, forçando assim $\Lambda_{\mathcal{E}}^{inf}(\omega)$ e $\Lambda_{\mathcal{E}}^{sup}(\omega)$ a coincidirem para quase todo ω.

Seja $\omega = \theta^j\omega_i$, com $\omega_i \in \mathcal{E}_\alpha$. Note que os valores $u_{\mathcal{E}}(\theta^{j+1}\omega_i, x)$, $u_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i, y)$ e $\Lambda_{\mathcal{E}}^\star(\theta^j\omega_i)$ são obtidos, respectivamente, como limites das sequências $u_{t_{n_k}^\star(\alpha,i,j)}(\theta^{j+1}\omega_i, x)$, $u_{t_{n_k}^\star(\alpha,i,j)}(\theta^j\omega_i, y)$ e $\frac{1}{t_{n_k}^\star(\alpha, i, j)} \log \lambda_{t_{n_k}^\star(\alpha,i,j)}(\theta^j\omega_i)$. Segue daí que, em virtude da desigualdade (2.4), para pontos $\theta^j\omega_i$ pertencentes ao subconjunto de Ω sobre o qual estão definidas as funções $u_{\mathcal{E}}$ e $\Lambda_{\mathcal{E}}^\star$, o qual tem probabilidade 1 com respeito a $\mathbb{P}$, observamos a desigualdade

$$\phi(\theta^j\omega_i, y) + u_{\mathcal{E}}(\theta^{j+1}\omega_i, \sigma y) - u_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i, y) - \Lambda^\star_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i) \leqslant 0, \quad \forall\, y \in \Sigma(\theta^j\omega_i). \tag{2.6}$$

Dado então $\theta^j\omega_i$ que satisfaz a desigualdade acima, considere $x \in \Sigma(\theta^{j+1}\omega_i)$. Afirmamos que há $y \in \Sigma(\theta^j\omega_i)$, com $\sigma y = x$, tal que

$$\phi(\theta^j\omega_i, y) + u_{\mathcal{E}}(\theta^{j+1}\omega_i, x) - u_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i, y) - \Lambda^\star_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i) = 0.$$

Com efeito, por redução ao absurdo, suponha que exista $\eta > 0$ tal que, para todo $y \in \sigma^{-1}x$, temos

$$\phi(\theta^j\omega_i, y) + u_{\mathcal{E}}(\theta^{j+1}\omega_i, \sigma y) - u_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i, y) - \Lambda^\star_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i) < -\eta < 0.$$

Resulta das convergências de $u_{\mathcal{E}}$ e $\Lambda^\star_{\mathcal{E}}$ sobre a sequência $\{t^\star_{n_k}(\alpha, i, j)\}$ (a qual escreveremos apenas $t^\star_{n_k}$) que, para k suficientemente grande, temos

$$t^\star_{n_k}\left(\phi(\theta^j\omega_i, y) + u_{t^\star_{n_k}}(\theta^{j+1}\omega_i, x) - u_{t^\star_{n_k}}(\theta^j\omega_i, y) - \frac{1}{t^\star_{n_k}}\log\lambda_{t^\star_{n_k}}(\theta^j\omega_i)\right) < -\frac{t^\star_{n_k}\eta}{2},$$

de modo que, ao fazer $k \to \infty$,

$$\exp\left(t^\star_{n_k}\big(\phi(\theta^j\omega_i, y) + u_{t^\star_{n_k}}(\theta^{j+1}\omega_i, x) - u_{t^\star_{n_k}}(\theta^j\omega_i, y) - \frac{1}{t^\star_{n_k}}\log\lambda_{t^\star_{n_k}}(\theta^j\omega_i)\big)\right) \to 0.$$

Ora, como isto vale para todo $y \in \sigma^{-1}x$, resulta que

$$\sum_{\substack{y\in\Sigma(\theta^j\omega_i)\\ \sigma y = x}} \exp\left(t^\star_{n_k}\phi(\theta^j\omega_i, y) - \log\lambda_{t^\star_{n_k}}(\theta^i\omega_i) - t^\star_{n_k}u_{t^\star_{n_k}}(\theta^j\omega_i, y) + t^\star_{n_k}u_{t^\star_{n_k}}\circ\Theta(\theta^j\omega_i, y)\right) \to 0,$$

o que é um absurdo, pois, pela equação (2.2), para qualquer valor de t, o somatório acima é sempre igual a 1. Portanto, há ao menos uma pré-imagem y de x que realiza a igualdade

$$\phi(\theta^j\omega_i, y) + u_{\mathcal{E}}(\theta^{j+1}\omega_i, x) - u_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i, y) - \Lambda^\star_{\mathcal{E}}(\theta^j\omega_i) = 0.$$

□

Observe que o valor de $\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega)$ está entre $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\log\lambda_t(\omega)$ e $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\log\lambda_t(\omega)$ e depende da escolha do conjunto $\mathcal{E}$ que indexa as sequências sobre as quais são tomados os limites de sua definição. No lema a seguir, mostramos que as médias temporais de $\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega)$ se comportam como médias de Birkhoff. Mais precisamente, mostramos que, independentemente da escolha de $\mathcal{E}$, para quase todo $\omega \in \Omega$, há sequência $\{n_i\}$ para a qual as médias

$\frac{1}{n_i}\sum_{l=0}^{n_i-1}\Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l\omega)$ convergem para $\beta(\phi)$. Embora a mensurabilidade e integrabilidade de $\Lambda_{\mathcal{E}}$ ainda não estejam asseguradas, impossibilitando assim aplicar o Teorema de Birkhoff, o lema a seguir nos dá indícios que $\Lambda_{\mathcal{E}}$ se comporta como valor ergódico maximal aleatório.

Lema 2.9. *Para quase todo $\omega \in \Omega$ há sequência $\{n_i(\omega)\}$, independente da escolha do conjunto $\mathcal{E}$, para a qual*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{l=0}^{n_i-1}\Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l\omega)=\beta(\phi).$$

Demonstração. Como no Lema 2.5 as caracterizações de $\beta(\phi)$ são válidas para quase todo ω, usando a θ-invariância de $\mathbb{P}$, podemos obter um subconjunto mensurável $\hat{\Omega}$, de probabilidade 1 com respeito a $\mathbb{P}$, sobre o qual as mesmas descrições são verificadas ao longo da órbita de qualquer elemento de $\hat{\Omega}$, ou melhor,

$$\beta(\phi)=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Sigma(\theta^j\omega)}\frac{1}{n}S_n\phi(\theta^j\omega,x)=\sup_{x\in\Sigma(\theta^j\omega)}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\phi(\theta^j\omega,x)\qquad\forall\,\omega\in\hat{\Omega},\ \forall\, j\in\mathbb{Z}.$$

Fixamos probabilidade ergódica $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{P}}^{max}(\phi)$ e consideramos $(\theta^j\omega_i,x_{reg})$, com $\omega_i\in\mathcal{E}_\alpha\cap\hat{\Omega}$ e $j\in\mathbb{Z}$, ponto regular (segundo o Teorema de Birkhoff) para ϕ com respeito a μ. Note que, se um ponto é regular segundo o Teorema de Birkhoff, todos os pontos de sua órbita também são regulares, o que nos permitirá examinar a órbita de $(\theta^j\omega_i,x_{reg})$ independente do conjunto $\mathcal{E}$ de representantes de órbitas considerado.

A fim de não sobrecarregar demasiadamente a notação, podemos renomear ω_i como ω_0 e escrevemos simplesmente $\omega_j=\theta^j\omega_0$. Assim como na demonstração do Lema 2.5, consideramos o conjunto de probabilidade positiva $\Omega_C\subset\Omega$ para o qual $\|u_t\|_\omega\leqslant C$, $\forall\ \omega\in\Omega_C$, $\forall\ t>0$. Consideramos também a sequência $\{n_i\}$ formada pelos tempos de retorno de ω_j em Ω_C. Aplicamos a desigualdade (2.6) para as n primeiras iteradas do ponto (ω_j,x_{reg}) escolhido e tomamos suas médias a fim de obter a seguinte desigualdade válida para todo $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}S_n\phi(\omega_j,x_{reg})+\frac{u_{\mathcal{E}}(\theta^n\omega_j,\sigma^n x_{reg})}{n}-\frac{u_{\mathcal{E}}(\omega_j,x_{reg})}{n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l\omega_j).$$

Quando $n=n_i$, ou seja, $\theta^n\omega_j\in\Omega_C$, a desigualdade acima então fornece

$$\frac{1}{n_i}S_{n_i}\phi(\omega_j,x_{reg})-\frac{C}{n_i}-\frac{u_{\mathcal{E}}(\omega_j,x_{reg})}{n_i}\leqslant\frac{1}{n_i}\sum_{l=0}^{n_i-1}\Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l\omega_j).$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, considere $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\Big|\frac{1}{n_i} S_{n_i}\phi(\omega_j, x_{reg}) - \beta(\phi)\Big| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\frac{C}{n_i} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad e \qquad \frac{\|u_{\mathcal{E}}\|_{\omega_j}}{n_i} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7}$$

Das desigualdades acima resulta para n_i suficientemente grande

$$\beta(\phi) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j).$$

Por outro lado, dado um índice n_i satisfazendo (2.7), em virtude de estarmos tomando ω_j pertencente a $\hat{\Omega}$, podemos supor n_i cumprindo também a desigualdade

$$\Big|\sup_{x \in \Sigma(\omega_j)} \frac{1}{n_i} S_{n_i}\phi(\omega_j, x) - \beta(\phi)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixamos $x_{n_i} \in \Sigma(\theta^{n_i}\omega_j)$. Seja $\{(\omega_j, x_0), (\theta\omega_j, x_1), \ldots, (\theta^{n_i}\omega_j, x_{n_i})\}$ um trecho de órbita calibrada, ou seja, uma sequência finita tal que $\sigma x_l = x_{l+1}$ e

$$u_{\mathcal{E}}(\theta^{l+1}\omega_j, x_{l+1}) = u_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j, x_l) - \phi(\theta^l \omega_j, x_l) + \Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j),$$

cuja existência decorre da Proposição 2.8. Novamente considerando médias, temos:

$$\frac{u(\theta^{n_i}\omega_j, x_{n_i}) - u(\omega_j, x_0)}{n_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j) - \frac{1}{n_i} S_{n_i}\phi(\omega_j, x_0).$$

Observe agora que

$$\sup_{x \in \Sigma(\omega_j)} \frac{1}{n_i} S_{n_i}\phi(\omega_j, x) + \frac{u_{\mathcal{E}}(\theta^{n_i}\omega_j, x_{n_i}) - u_{\mathcal{E}}(\omega_j, x_0)}{n_i} \geqslant \frac{1}{n_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j).$$

Sendo assim, pelas estimativas agora adotadas para n_i suficientemente grande, temos

$$\beta(\phi) + \varepsilon \geqslant \frac{1}{n_i} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fica bem definido o limite

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{l=0}^{n_i-1} \Lambda_{\mathcal{E}}(\theta^l \omega_j) = \beta(\phi).$$

□

2.2.1 O caso de suporte em uma única órbita

Lembre que ergodicidade assegura que um conjunto mensurável invariante de medida positiva de fato tem probabilidade total. Logo, se há uma órbita $\mathcal{O}(\omega_0) = \{\theta^j \omega_0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ pertencente a σ-álgebra $\mathcal{F}$, com $\mathbb{P}(\mathcal{O}(\omega_0)) > 0$, obrigatoriamente $\mathcal{O}(\omega_0)$ tem probabilidade 1. Para este caso, veremos a seguir como construir subação aleatória para um potencial aleatório ϕ.

Observamos que a existência de uma órbita mensurável de probabilidade total pode sempre ser reduzida ao caso particular no qual os conjuntos unitários formados por pontos da órbita são mensuráveis. Com efeito, suponha que a órbita de um ponto ω_0 seja mensurável e de massa total com respeito a $\mathbb{P}$. Denotamos por $\mathcal{F}'$ a σ-álgebra induzida por $\mathcal{F}$ sobre a órbita $\mathcal{O}(\omega_0)$. Seja $E_0 := \bigcap_{\substack{E\in\mathcal{F}'\\ \omega_0\in E}} E$ o conjunto mensurável minimal contendo ω_0. Se $E_0 = \{\omega_0\}$, então todo subconjunto unitário de $\mathcal{O}(\omega_0)$ é mensurável, pois θ é transformação inversível bimensurável, e nada mais precisamos discutir. Caso $E_0\backslash\{\omega_0\} \neq \varnothing$, existe $j \in \mathbb{Z}^*$ tal que $\theta^j\omega_0 \in E_0$. Daí, por minimalidade, $E_0^j := \bigcap_{\substack{E\in\mathcal{F}'\\ \theta^j\omega_0\in E}} = E_0$, pois claramente $E_0^j \subset E_0$ e, por outro lado, se $D = E_0\backslash E_0^j \neq \varnothing$, então ou $\omega_0 \in D$ ou $\omega_0 \in E_0\backslash D$, o que produziria o absurdo de ω_0 pertencer a um subconjunto mensurável próprio de E_0. Logo, podemos particionar $\mathcal{O}(\omega_0)$ em classes de equivalência de conjuntos minimais mensuráveis. Afirmamos que há uma quantidade finita de classes. De fato, considere o inteiro positivo $p := \min\{|j - i| \,|\, \theta^j\omega_0, \theta^i\omega_0 \in E_0,\ i \neq j\}$. Temos que $\theta^p(E_0) \cap E_0 \neq \varnothing$, donde, por minimalidade, $\theta^p(E_0) = E_0$. Note que a definição de p implica que $\theta^i(E_0) \cap \theta^j(E_0) = \varnothing$, para $0 \leqslant i < j < p$. Assim, fazendo uso da minimalidade das classes de equivalência, é fácil concluir que há exatamente p classes $E_0, \theta(E_0), \ldots, \theta^{p-1}(E_0)$.

Note então que a mensurabilidade de $\ell(\omega)$ e A_ω assegura que estas aplicações devem ser constantes sobre cada classe $\theta^i(E_0)$, com $0 \leqslant i < p$. Deste modo, as fibras $\Sigma(\theta^{kp+i}\omega_0)$, com $k \in \mathbb{Z}$, são idênticas entre si para cada valor fixo de i. A mensurabilidade de ϕ com respeito a ω garante que, fixado $x \in \Sigma(\theta^i\omega_0)$, com $i = 0, ..., p-1$, a restrição da variável aleatória $\phi(\cdot, x)$ à classe $\theta^i(E_0)$ é constante. Mais ainda, como $\mathbb{P}$ é invariante com respeito a θ e a órbita de ω_0 é suposta ser de massa total, temos que $\mathbb{P} = \dfrac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\theta^i(E_0)}$.

Portanto, no caso em que há uma órbita mensurável de massa total, quando os conjuntos unitários formados por seus pontos não são mensuráveis, podemos identificar esta dinâmica com um STFA no qual o espaço de probabilidade é constituído por uma órbita periódica de período p, pela σ-álgebra de todas as partes e pela probabilidade dada pela média das deltas de Dirac sobre a órbita.

Proposição 2.10. *Sejam* (Σ, Θ) *um STFA e* $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ *um potencial aleatório satisfazendo (HB) e suponha que* $\log \ell \in L^1(\mathbb{P})$. *Se há* $\omega_0 \in \Omega$ *cuja órbita é mensurável e de probabilidade positiva, então* ϕ *admite uma subação aleatória calibrada* $u_{\mathcal{E}}$. *Mais ainda, caso* $\log C_\phi$ *seja integrável,* $u_{\mathcal{E}}$ *também é integrável.*

Demonstração. Como $\mathbb{P}$ dá massa para apenas uma órbita, todos os pontos fora desta podem ser desconsiderados na discussão de existência de subação aleatória. Pela discussão realizada antes do enunciado da proposição, podemos sempre reduzir a argumentação ao caso em que os pontos da órbita são mensuráveis.

Caso $\mathcal{O}(\omega_0)$ seja periódica de período p, o STFA pode ser facilmente identificado a um *subshift* de tipo finito determinístico. Com efeito, convencionamos $s(0) = 0$ e, para $0 < k \leqslant p-1$, seja $s(k) := \sum_{l=0}^{k-1} \ell(\theta^l\omega_0)$. Consideramos alfabeto de tamanho $\ell = \sum_{i=0}^{p-1} \ell(\theta^i\omega_0)$ e matriz de transição A de dimensões $\ell \times \ell$ definida por $A(i,j) = A_{\theta^k\omega_0}(i,j)$ se $s(k) < i \leqslant s(k+1)$ e $s(k+1) < j \leqslant s(k+2)$, e $A(i,j) = 0$ caso contrário. Em notação matricial, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{\omega_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{\theta\omega_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{\theta^{p-3}\omega_0} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{\theta^{p-2}\omega_0} \\ A_{\theta^{p-1}\omega_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja (Σ_A, σ) o *subshift* de tipo finito definido sobre o alfabeto de ℓ símbolos associado à matriz de transição A. Definimos a distância em Σ_A também como $d(x,y) = r^{\min\{i \,|\, x_i \neq y_i\}}$.

Identificamos as fibras $\Sigma(\omega_0), \ldots, \Sigma(\theta^{p-1}\omega_0)$ com o *subshift* de tipo finito Σ_A pelo mapa

$$I(\theta^k\omega_0, (x_0, x_1, x_2, ...)) = (x_0+s(k\ (mod\, p)), x_1+s(k+1\ (mod\, p)), x_2+s(k+2\ (mod\, p)), ...).$$

É consequência direta da definição de I que, para qualquer $x \in \Sigma(\theta^k\omega_0)$,

$$\sigma I(\theta^k\omega_0, x) = I(\theta^{k+1}\omega_0, \sigma x).$$

Além disso, I é invertível, sendo sua inversa dada por

$$I^{-1}(x_0, x_1, x_2, ...) = (\theta^k\omega_0, (x_0 - s(k), x_1 - s(k+1), x_2 - s(k+2), ...)),$$

para $s(k-1) < x_0 \leqslant s(k)$. Destacamos assim a conjugação entre as dinâmicas dada pelas composições $\sigma \circ I = I \circ \Theta$ e $\Theta \circ I^{-1} = I^{-1} \circ \sigma$. Essa conjugação pode ser vista como topológica, uma vez que, convencionando $\delta_{kl} = 1$ se $k = l$ e $\delta_{kl} = 0$ caso caso contrário, podemos adotar a métrica $D((\theta^k\omega_0, x), (\theta^l\omega_0, y)) = 1+\delta_{kl}(d(x,y)-1)$, para $0 \leqslant k, l \leqslant p-1$, tornando então $I\colon \bigcup_{k=0}^{p-1} \Sigma(\theta^k\omega_0) \to \Sigma_A$ uma isometria. Observe que $f(x) = \phi \circ I^{-1}(x)$ define um potencial holderiano sobre (Σ_A, σ), com constante holderiana sendo dada pelo máximo entre os valores $\kappa(\theta^k\omega_0)$ e $2\|\phi\|_{\theta^k\omega_0}$, com $0 \leqslant k \leqslant p-1$. A conjugação claramente fornece $\beta(f) = \beta(\phi)$. Então, pela Proposição 29 de [CLT01], temos que f admite subação calibrada holderiana v sobre Σ_A. Assim, ao definir $u := v \circ I$, temos que u é subação aleatória calibrada localmente holderiana para ϕ com valor ergódico maximal aleatório constante igual a $\beta(\phi)$.

Analisamos então o caso em que $\mathcal{O}(\omega_0)$ não é periódica. Para tanto, basta considerar simplesmente como família de representantes de órbitas o conjunto $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\alpha = \{\omega_0\}$. Segue daí que são mensuráveis as funções $u_\mathcal{E}$ e $\Lambda_\mathcal{E}$ definidas em razão da Proposição 2.8.

A hipótese de integrabilidade de $\log \ell$ garante que ϕ cumpre (HL). Mais ainda, resulta do item *(a)* do Teorema 1.35 que, para todo $t > 0$, temos

$$-\|\phi\|_\omega \leqslant \inf_{x\in\Sigma(\theta\omega)} \frac{1}{t} \log(\mathcal{L}_{t\phi}(\omega)1)(\theta\omega, x) \leqslant \frac{1}{t}\log\lambda_t(\omega) \leqslant \frac{1}{t}\log\|\mathcal{L}_{t\phi}(\omega)1\|_{\theta\omega} \leqslant \frac{1}{t}\log\ell(\omega) + \|\phi\|_\omega.$$

Sendo assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para uma sequência $\{\frac{1}{t_n}\log\lambda_{t_n}\}$, obtendo a integrabilidade de $\Lambda_\mathcal{E}$. Então, utilizando a caracterização de $\beta(\phi)$

dada na Proposição 2.1, temos

$$\int_{\Omega} \Lambda_{\mathcal{E}} \, d\mathbb{P} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n} \int_{\Omega} \log \lambda_{t_n} \, d\mathbb{P} = \beta(\phi).$$

Pela Proposição 2.8, concluímos que $u_{\mathcal{E}}$ é subação aleatória calibrada para o potencial aleatório ϕ, com valor ergódico maximal aleatório igual a $\Lambda_{\mathcal{E}}$. Por fim, da prova do Lema 2.3, temos que $\|u_t\|_{\omega} \leqslant \log C_{\phi}(\omega)$. Então, utilizamos novamente o Teorema da Convergência Dominada e a hipótese integrabilidade de $\log C_{\phi}$ para garantir que $u_{\mathcal{E}}$ é função aleatória integrável. □

Observamos que a demonstração da proposição acima está fundamentada na existência de uma sequência $\{t_n\}$, independente de ω, para a qual as funções $u_{t_n}(\omega, \cdot)$ são convergentes para quase todo ω. Sendo assim, sempre que asseguramos a existência de limites das funções $u_{t_n}(\omega, \cdot)$ de maneira independente de ω, podemos seguir este mesmo raciocínio para obter subação calibrada para um potencial aleatório ϕ.

Uma segunda observação ainda a respeito da proposição anterior é sobre sua aplicabilidade. Quando pensamos em um espaço de probabilidade no qual há uma única órbita de interesse, temos, por exemplo, as probabilidades sturmianas, voltadas ao estudo de conjuntos minimais. Um outro caso possível é o deslocamento nos inteiros, munido da medida de densidade.

Em geral, precisamos garantir a mensurabilidade de ambas as funções aleatórias $u_{\mathcal{E}}$ e $\Lambda_{\mathcal{E}}$ e a integrabilidade desta última, para então as chamar de subação aleatória e valor ergódico maximal aleatório. Uma linha de raciocínio para se obter limite mensurável da família de funções $\{u_t\}$, porém no sentido fraco (na topologia fraca de $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$), é inicialmente através da aplicação do Teorema de Dunford-Pettis. Desenvolvemos esta estratégia na próxima subseção. Somos gratos a Philippe Thieullen por nos chamar a atenção para a viabilidade de explorar esta pista teórica.

2.2.2 Construção de subação calibrada no caso uniformemente aperiódico

Recordamos que aperiodicidade uniforme significa que existe uma constante $M \in \mathbb{N}$ tal que, para quase todo $\omega \in \Omega$ e para quaisquer $i \in W^1_{\omega}$ e $j \in W^1_{\theta^M \omega}$, a entrada ij da matriz $A_{\omega} \cdot \dots \cdot A_{\theta^{M-1}\omega}$ é estritamente positiva. Além dessa hipótese base, suporemos ao longo dessa subseção que o potencial aleatório $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ cumpre (HB), que $\log \ell(\omega) \in L^1(\mathbb{P})$ – o que garante também a hipótese (HL) – e que o conjunto de iteradas de normalização do operador de transferência aplicado à função constante igual a 1 possui oscilação controlada, como explicaremos mais adiante (ver definições 2.17 e 2.18). Para esta situação, garantiremos a existência de subação calibrada.

Introduziremos brevemente a integração de Bochner antes de iniciar o estudo de aplicação do Teorema de Dunford-Pettis para obtenção de subação calibrada. Para tanto, seguiremos as definições presentes em [DU77]. O leitor interessado poderá obter mais detalhes nesta referência.

A integração de Bochner pode ser interpretada como uma generalização da integral de Lebesgue para funções vetoriais que tomam valores em um espaço de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$.

Definição 2.11. *Dados um espaço de medida finita $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e um espaço de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$, dizemos que $f\colon \Omega \to E$ é uma função vetorial simples se existem $e_1, e_2, ..., e_k \in E$ e $F_1, F_2, ..., F_k \in \mathcal{F}$ tais que $f = \sum_{i=1}^{k} e_i \chi_{F_i}$, onde χ_{F_i} denota a função característica do conjunto F_i. Dizemos ainda que uma função vetorial $f\colon \Omega \to E$ é $\mathbb{P}$-mensurável se há uma sequência $\{f_n\}$ de funções simples tal que $\lim_{n\to\infty} \|f(\omega) - f_n(\omega)\|_E = 0$, $\mathbb{P}$-q.t.p.*

Definição 2.12. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de medida finita e $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach. Dizemos que uma função vetorial $\mathbb{P}$-mensurável $f\colon \Omega \to E$ é integrável segundo Bochner se há uma sequência de funções simples $\{f_n\}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f(\omega) - f_n(\omega)\|_E \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Nesse caso, para $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} e_i^n \chi_{F_i^n}$, a integral de Bochner de f é definida por

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} e_i^n \mathbb{P}(F_i^n).$$

O conjunto de funções vetoriais Bochner integráveis é denotado por $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$.

Ainda segundo [DU77, Teorema II.2.2, p. 45], uma função vetorial $f\colon \Omega \to E$ é integrável segundo Bochner se, e somente se, $\int_\Omega \|f(\omega)\|_E \, \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$. Note que essa última condição nos permite introduzir norma natural sobre $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$. Repare que tal norma se assemelha muito à norma das funções aleatórias $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. Podemos, na verdade, identificar o espaço $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ com um subconjunto de $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$, para um espaço de Banach E adequado.

Para tanto, consideraremos como E o conjunto de funções mensuráveis e limitadas em X munido da norma do supremo, a qual denotaremos por $\|\cdot\|_E$ para maior clareza do leitor. Obviamente trata-se de um espaço de Banach. Note que, pela definição 1.10, dado $\phi \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, podemos sempre escolher como representante em sua classe uma aplicação $\hat{\phi}$ de Ω neste espaço de Banach. Mais precisamente, uma vez que $\|\phi\| < \infty$ (norma com respeito a $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$), há um conjunto de medida nula sobre o qual $\|\phi\|_\omega = \sup_{x\in\Sigma(\omega)} |\phi(\omega, x)|$ não é limitado. Tomamos, por exemplo, como representante inicial aquele identicamente nulo sobre este conjunto de medida nula, o qual ainda denotamos por ϕ. Uma forma geral de então prosseguir é fazer uso da Proposição 1.5 de [BG95]. Este resultado garante que há extensão mensurável de $\phi|_\Sigma$ para $\Omega \times X$, denotada por $\hat{\phi}$, a qual preserva a norma sobre as fibras, ou melhor, o supremo de $\hat{\phi}(\omega, \cdot)$ sobre X coincide com seu supremo sobre a fibra $\Sigma(\omega)$. Sendo assim, temos $\|\hat{\phi}(\omega, \cdot)\|_E = \|\phi\|_\omega$. Isto mostra que $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ pode ser mergulhado isometricamente em $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$. Mais ainda, dada uma sequência convergente em $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$, contida na imagem deste mergulho isométrico, podemos naturalmente a identificar a uma sequência de Cauchy em $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. O limite da sequência original é então identificado à imagem do limite da sequência de Cauchy pela isometria. Em outros termos, $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ se identifica a um subespaço de Banach de $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$. Cometendo um pequeno abuso de notação, passaremos a considerar $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ como subespaço de Banach de $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$.

Recorde que a topologia fraca de um espaço de Banach E é a menor topologia na qual os funcionais lineares $\xi \in E^*$ são contínuos. Em particular, dizemos que uma sequência $\{f_n\} \in E$ converge fracamente para $f \in E$ se, para qualquer $\xi \in E^*$, temos $\xi(f_n) \to \xi(f)$ quando $n \to \infty$. Em notação, escrevemos $f_n \rightharpoonup f$. Ademais, um conjunto $S \subset E$ é dito relativamente fracamente compacto (RFC) se toda sequência $\{f_n\} \subset S$ possui subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge fracamente. Recordemos também a definição de integrabilidade uniforme.

Definição 2.13. *Dizemos que um conjunto $A \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ é uniformemente integrável se*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{f\in A} \int_{\|f(\omega)\|_E > k} \|f(\omega)\|_E \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Observe que, quando A é subconjunto de $L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$, a condição de integrabilidade uniforme acima pode ser reescrita na seguinte notação

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\phi\in A} \int_{\|\phi\|_\omega > k} \|\phi\|_\omega \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Uma condição suficiente para integrabilidade uniforme de um conjunto $A \subset L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ é que exista uma função $g \in L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$ tal que, $\forall\, \phi \in A$, ocorra $\|\phi\|_\omega < g$.

Finalmente, enunciaremos a seguir o Corolário 9 de [Ul91], que fornece condições para um subconjunto de $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ ser RFC. Resultados como este, que abordam condições para compacidade fraca, são usualmente conhecidos na literatura como versões do Teorema de Dunford-Pettis.

Teorema 2.14 (Dunford-Pettis)**.** *Seja $A \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ um conjunto limitado e uniformemente integrável. Assuma que, para quase todo $\omega \in \Omega$, o conjunto $A(\omega) := \{f(\omega) \mid f \in A\}$ é RFC em E. Então, A é RFC em $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$.*

Aplicaremos este Teorema ao conjunto de funções aleatórias $\{u_t\}_{t>1} \subset L^1_{\mathbb{P}}(\Sigma)$. Embora o mergulho isométrico discutido acima permita trabalharmos com estas funções aleatórias vendo-as como definidas sobre $\Omega \times X$, preocupamo-nos exclusivamente com seus comportamentos sobre as fibras. Em vista disso, para evitar discussões técnicas desnecessárias a respeito do comportamento dessas funções aleatórias fora das fibras, a partir de agora as tomaremos como sendo identicamente nulas fora das fibras, ou seja, passaremos a considerar na verdade as funções aleatórias $u_t\chi_\Sigma$, as quais, por simplicidade, denotaremos ainda por u_t.

Durante a prova do Lema 2.3 foi estabelecido que, para quase todo ω, temos

$$\|u_t(\omega,\cdot)\|_\omega \leqslant \log C_\phi(\omega) = \log B_{\theta^{-J(\omega)}\omega} + S_{J(\omega)} \log \ell(\theta^{-J(\omega)}\omega) + \max_{0\leqslant k\leqslant J(\omega)} 2\|S_k\phi\|_{\theta^{-k}\omega}.$$

Ao impor a hipótese de aperiodicidade sobre as matrizes de transição $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, temos que as funções mensuráveis $M(\omega)$ e $J(\omega)$, definidas no Lema 1.26, são limitadas por uma constante M. Em vista dessa observação e das imposições de ϕ cumprir (HB) e $\log \ell$ ser integrável com respeito a $\mathbb{P}$, temos que

$$\|u_t\| \leqslant \int_\Omega \log B_\omega \, d\mathbb{P} + M \int_\Omega \log \ell \, d\mathbb{P} + 2M\|\phi\| < \infty.$$

Assim, $\{u_t\}_{t>1}$ é um conjunto limitado e uniformemente integrável em $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$. Para assegurar que este é um conjunto RFC, utilizaremos novamente o Lema 2.3. Para tanto, note que

$$\|u_t(\omega,\cdot) - u_s(\omega,\cdot)\|_E = \max\{\|u_t - u_s\|_\omega, \sup_{x\in X\setminus\Sigma(\omega)} |u_t(\omega,x) - u_s(\omega,x)|\}.$$

Uma vez que estamos considerando a família $\{u_t\}$ como nula fora de Σ, o segundo elemento no máximo acima é sempre zero, donde $\|u_t(\omega,\cdot)-u_s(\omega,\cdot)\|_E = \|u_t-u_s\|_\omega$. Daí, pelo Lema 2.3, sabemos que, para quase todo ω, o conjunto das restrições $\{u_t(\omega,\cdot)|_{\Sigma(\omega)}\}$ é equicontínuo e equilimitado. Como $\Sigma(\omega)$ é um subconjunto compacto de X, há subsequência $t_n^\omega \to \infty$ e função $u(\omega,\cdot)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{t_n^\omega}(\omega,\cdot) - u(\omega,\cdot)\|_E = 0,$$

ou seja, $u_{t_n^\omega}(\omega,\cdot)$ converge em norma para $u(\omega,\cdot)$. Como convergência em norma garante convergência fraca, concluímos que $\{u_t\}_{t>1}$ é um conjunto RFC.

Mostraremos agora que a família $\{\frac{1}{t}\log\lambda_t\}_{t>1}$, interpretada como uma família de elementos de $L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ (funções identicamente constantes sobre $\Sigma(\omega)$ para cada ω), também cumpre as hipóteses do Teorema de Dunford-Pettis. Com efeito, retomando as desigualdades (2.3) e (2.4), observamos que o valor absoluto $|\frac{1}{t}\log\lambda_t(\omega)|$ está limitado por $\log\ell(\omega) + \|\phi\|_\omega + \log C_\phi(\omega) + \log C_\phi(\theta\omega)$. Como vimos, a aperiodicidade uniforme das matrizes de transição A_ω e a integrabilidade de $\log\ell(\omega)$ implicam que $\log C_\phi$ é integrável com respeito a $\mathbb{P}$, de modo que $\{\frac{1}{t}\log\lambda_t\}_{t>1}$ é um subconjunto limitado e uniformemente integrável de $L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$. Além disso, esta mesma observação assegura que tal família é relativamente compacto, uma vez que, para quase todo ω, o conjunto de valores $\{\frac{1}{t}\log\lambda_t(\omega)\}_{t>1}$ é limitado.

Pelo que foi discutido acima, as famílias $\{u_t\}_{t>1}$ e $\{\frac{1}{t}\log\lambda_t\}_{t>1}$ cumprem as hipóteses do Teorema 2.14. Portanto, para qualquer sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendendo para infinito, há subsequência $\{t_{n_k}\}$, e funções vetoriais $u_{Boc}, \Lambda_{Boc} \in L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ que cumprem $u_{t_{n_k}} \rightharpoonup u_{Boc}$ e $\frac{1}{t_{n_k}}\log\lambda_{t_{n_k}} \rightharpoonup \Lambda_{Boc}$. Repare que o Teorema 2.14 nos auxilia a contornar a dificuldade técnica de obter um limite *mensurável* das funções aleatórias u_t e $\frac{1}{t}\log\lambda_t$, ainda que isto seja feito no sentido fraco.

O próximo passo natural do estudo reside em entender qual é o ganho obtido com a convergência fraca de subsequências de ambas as famílias $\{u_t\}$ e $\{\frac{1}{t}\log\lambda_t\}$. Para tanto, aplicaremos funcionais lineares do dual de $L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ sobre desigualdades estabelecidas anteriormente. Não necessitaremos realizar aqui uma descrição completa deste dual, bastando explicitar alguns de seus elementos.

A definição dos espaços $L^p_{Boc}(\mathbb{P},E)$ para $1 < p < \infty$ é feita de forma canônica: trata-se do conjunto (das classes de equivalência) de funções vetoriais mensuráveis f, tomando valores em E, que cumprem a desigualdade $\int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$. Por outro lado,

$L^{\infty}_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ denota o conjunto de funções vetoriais mensuráveis essencialmente limitadas com respeito à norma de E aplicada aos elementos $f(\omega)$, ou seja, as quais cumprem $\inf_{V} \sup_{\omega \in V^{\complement}} \|f(\omega)\|_E < \infty$, onde o ínfimo é tomado sobre conjuntos mensuráveis V de medida nula com respeito a $\mathbb{P}$.

Denotando o dual do espaço de Banach E por E^*, o Teorema IV.1.1 de [DU77] nos diz que se $1 \leqslant p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $L^{p}_{Boc}(\mathbb{P}, E)^* = L^{q}_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$ se, e somente se, E^* possui a propriedade de Radon-Nikodym. Um espaço de Banach E possui tal propriedade se toda medida vetorial ν (com valores em E) de variação limitada pode ser representada na forma de uma integral de Bochner. Uma medida vetorial ν é dita de variação limitada se $\sup_{\mathcal{P}} \sum_{A \in \mathcal{P}} \|\nu(A)\|_E < \infty$, onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de E. Além disso, a representação como integral de Bochner significa que, para qualquer $F \subset E$ mensurável, temos $\nu(F) = \displaystyle\int_F f \, \mathrm{d}\mathbb{P}$, para alguma função vetorial $f \in L^{1}_{Boc}(\mathbb{P}, E)$. Como observado em [DU77, páginas 97 e 98], ainda que E^* não possua a propriedade de Radon-Nikodym, há sempre um mergulho isométrico de $L^{q}_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$ em $L^{p}_{Boc}(\mathbb{P}, E)^*$. A ação de um elemento $g^* \in L^{q}_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$ sobre um elemento $f \in L^{p}_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ é dada por $\displaystyle\int_{\Omega} g^*(f) \, \mathrm{d}\mathbb{P}$.

Estamos interessados em funcionais lineares pertencentes a $L^{1}_{Boc}(\mathbb{P}, E)^*$. Como mencionado acima, temos que $L^{\infty}_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$ pode ser visto como um subconjunto deste dual. Note que $L^{\infty}_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$ é o conjunto constituído das funções vetoriais mensuráveis $f^* \colon \Omega \to E^*$, que são essencialmente limitadas na norma de E^*, ou seja, para as quais existe $c > 0$ tal que $\|f^*(\omega)\|_{E^*} \leqslant c$, ω $\mathbb{P}$-q.t.p.

Como o espaço E aqui escolhido é o conjunto de funções mensuráveis e limitadas sobre X, este pode ser visto como um subespaço de Banach do conjunto das funções essencialmente limitadas com respeito a uma medida finita arbitrária atuando sobre o completamento da σ-álgebra de Borel de X. Sendo assim, seu dual E^* contém o conjunto de medidas finitamente aditivas, com sinal e limitadas em X. Para detalhes sobre esta relação de dualidade o leitor pode consultar, por exemplo, [FK34] para o caso de um intervalo da reta, ou então a generalização presente em [HY52] para a representação do dual das funções essencialmente limitadas sobre um espaço de Banach.

Considere a Delta de Dirac sobre um ponto $x_0 \in X$, denotada por δ_{x_0}. É claro que δ_{x_0} é um funcional linear limitado sobre o conjunto de funções mensuráveis limitadas em X, ou seja, trata-se de um elemento de E^*. Considere a função vetorial simples (de acordo com a definição 2.11) dada por $\mu^0(\cdot) = \delta_{x_0} \chi_{\Omega'}(\cdot)$, onde $\Omega' \subset \Omega$ é um conjunto de massa total com respeito a $\mathbb{P}$. Claramente $\|\mu^0(\omega)\|_{E^*} \leqslant 1$ para qualquer ω, donde $\mu^0 \in L^\infty_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$. A ação deste funcional sobre um elemento $\phi \in L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ é dada por

$$\int_\Omega \mu^0(\phi)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \Big(\int_X \phi(\omega, x)\,\mathrm{d}\delta_{x_0}\Big)\chi_{\Omega'}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \phi(\omega, x_0)\,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

de modo que μ^0 é funcional positivo. Note que a ação é exatamente aquela dada pela desintegração com respeito a $\mathbb{P}$ de uma medida μ em $\Omega \times X$, na qual $\mu_\omega \equiv \delta_{x_0}$, $\mathbb{P}$-q.t.p. Sendo assim, $\mu^0 \in L^\infty_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$ poderia ser interpretado como $\mathbb{P} \times \delta_{x_0} \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\Omega \times X)$.

Passaremos agora a nos concentrar sobre consequências do Teorema de Dunford-Pettis, decorrentes do fato de já ter assegurado convergência fraca. Recorde que, para qualquer sequência $t_n \to \infty$, o Teorema de Dunford-Pettis fornece subsequência, ainda denotada por $\{t_n\}$, e funções vetoriais $u_{Boc}, \Lambda_{Boc} \in L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ tais que $u_{t_n} \rightharpoonup u_{Boc}$ e $\dfrac{1}{t_n} \log \lambda_{t_{n_k}} \rightharpoonup \Lambda_{Boc}$.

Antes de mais nada, gostaríamos de frisar que a função vetorial Λ_{Boc} é constante com respeito a X, ou seja, que ω-q.t.p. $\Lambda_{Boc}(\omega, \cdot)$ é constante em X. Com efeito, considere pontos arbitrários $x_0, x_1 \in X$, as respectivas Deltas de Dirac $\delta_{x_0}, \delta_{x_1} \in E^*$ e um conjunto de massa total Ω'. Como antes, definimos $\mu^0 = \delta_{x_0}\chi_{\Omega'}$ e $\mu^1 = \delta_{x_1}\chi_{\Omega'}$. Para $\bullet \in \{0, 1\}$, ao fazer n tender a infinito, temos que

$$\int_\Omega \mu^\bullet\Big(\frac{1}{t_n}\log\lambda_{t_n}\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \to \int_\Omega \mu^\bullet(\Lambda_{Boc})\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Recorde então que λ_t é uma variável aleatória, ou melhor, vista como uma função do produto $\Omega \times X$, $\lambda_t(\omega, \cdot)$ é constante em X. Sendo assim, podemos reescrever a convergência acima como

$$\int_\Omega \frac{1}{t_n}\log\lambda_{t_n}(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \to \int_\Omega \Lambda_{Boc}(\omega, x_\bullet)\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Porém, a Proposição 2.1 garante que as integrais do lado esquerdo convergem para $\beta(\phi)$ quando $n \to \infty$. Ora, concluímos assim que

$$\int_\Omega [\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1)]\,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Uma vez que a integral acima é nula, ou $\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1) \equiv 0$ $\mathbb{P}$-q.t.p., ou existem conjuntos mensuráveis $\Omega^+, \Omega^- \subset \Omega$, ambos de medida positiva com respeito a $\mathbb{P}$, tais que

$$\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1) > 0, \forall\, \omega \in \Omega^+,$$
$$\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1) < 0, \forall\, \omega \in \Omega^-, \text{ e}$$
$$\int_{\Omega^+} [\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1)]\, d\mathbb{P} = -\int_{\Omega^-} [\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1)]\, d\mathbb{P} > 0.$$

Finalmente, considere a função vetorial simples $\tilde{\nu} = (\delta_{x_0} - \delta_{x_1})\chi_{\Omega^+} \in L^\infty_{Boc}(\mathbb{P}, E^*)$. Observe que

$$\int_\Omega \tilde{\nu}(\frac{1}{t_n} \log \lambda_{t_n})\, d\mathbb{P} = \int_{\Omega^+} \int_X \frac{1}{t_n} \log \lambda_{t_n}(\omega)\, d(\delta_{x_0} - \delta_{x_1})\, d\mathbb{P} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como $\tilde{\nu} \in L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)^*$, deveríamos ter que

$$\int_\Omega \tilde{\nu}(\frac{1}{t_n} \log \lambda_{t_n})\, d\mathbb{P} \to \int_\Omega \tilde{\nu}(\Lambda_{Boc})\, d\mathbb{P} = \int_{\Omega^+} [\Lambda_{Boc}(\omega, x_0) - \Lambda_{Boc}(\omega, x_1)]\, d\mathbb{P} > 0,$$

o que é um absurdo. Pelo discutido acima, obtivemos ainda que $\displaystyle\int_\Omega \Lambda_{Boc}(\omega)\, d\mathbb{P} = \beta(\phi)$.

A convergência fraca será utilizada como passo inicial para a convergência forte. Necessitaremos de *tightness* e de oscilação controlada. Recorde então que a noção de *tightness* foi introduzida para probabilidades no início do capítulo 1 dessa tese (definição 1.5). Para subconjuntos de $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$, a definição de *tightness* seguirá como em [BGJ94, Definição 4.1'].

Definição 2.15. *Dizemos que um conjunto $\Xi \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ é tight se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um compacto aleatório K_ε, o qual toma valores nos compactos de E, tal que, para qualquer $f \in \Xi$,*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \notin K_\varepsilon(\omega)\}) < \varepsilon.$$

Como consequência direta do Lema 2.3 temos que que a sequência $\{u_{t_n}\}$ é *tight*.

Lema 2.16. *A sequência de funções aleatórias $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tight.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3, para quase todo $\omega \in \Omega$ a família $\{u_{t_n}(\omega, \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e equilimitada. Sendo assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli o conjunto $\overline{\{u_{t_n}(\omega, \cdot)\}}$ é um compacto de E. Considere então $K \subset \Omega \times E$ tal que, para quase todo ω, $K(\omega) = \overline{\{u_{t_n}(\omega, \cdot)\}}$. Resta apenas mostrar que K é mensurável para que este seja um compacto aleatório. Para tanto, fixada $f \in E$, note que $d(f, K(\omega)) = \inf_n \|f - u_{t_n}(\omega, \cdot)\|_E$, pois todo elemento de

$K(\omega)$ pode ser aproximado por uma subsequência $\{u_{t_{n_k}}(\omega,\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Logo, $\omega \mapsto d(f,K(\omega))$ é mensurável pois é um ínfimo de funções mensuráveis. $\square$

A aplicação do Teorema de Dunford-Pettis ao conjunto de funções aleatórias $\{u_t\}_{t>1}$ foi fundamental para obter limites mensuráveis de sequências de funções aleatórias $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ainda que no sentido fraco. Finalmente mostraremos que, com o controle da oscilação dessas funções aleatórias com respeito a ω, os limites fracos serão também limites fortes, ou seja, limites com respeito à norma $\|f\| = \displaystyle\int_\Omega \|f(\omega)\|_E \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ de $L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$.

Como proposto em [BGJ94], definimos a oscilação de Bocce de uma função $f \in L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ em relação a um conjunto $\Omega' \in \mathcal{F}$ de medida positiva com respeito a $\mathbb{P}$.

Definição 2.17. *Sejam $f \in L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ e $\Omega' \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(\Omega') > 0$. A oscilação de Bocce de f com respeito a Ω' é dada por*

$$osc^B|_{\Omega'}(f) := \frac{\int_{\Omega'} \|f - \frac{\int_{\Omega'} f\,\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathbb{P}(\Omega')}\|_E \,\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathbb{P}(\Omega')}.$$

Observe que se $f,g \in L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ satisfazem $\|f(\omega)-g(\omega)\|_E < \varepsilon$ para quase todo ω, então, para qualquer conjunto $F \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(F) > 0$, temos que

$$osc^B(f)|_F \leqslant 2\varepsilon + osc^B|_F(g).$$

Com efeito, é imediato da definição que $osc^B|_F(f) \leqslant osc^B|_F(f-g) + osc^B|_F(g)$. Então, como $\|f(\omega)-g(\omega)\|_E < \varepsilon$ para quase todo ω, resulta que

$$\frac{1}{\mathbb{P}(F)}\int_F (f-g)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \leqslant \varepsilon \Rightarrow osc^B|_F(f-g) \leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(F)}\int_F \big(\|(f-g)\|_E + \varepsilon\big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} < 2\varepsilon.$$

Seguindo [BGJ94], é introduzido o critério de oscilação de Bocce para conjuntos de $L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$.

Definição 2.18. *Dizemos que um conjunto $\Xi \in L^1_{Boc}(\mathbb{P},E)$ satisfaz o critério de Bocce se, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $\Omega' \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(\Omega') > 0$, há uma coleção finita de conjuntos $\{\Omega'_1, \Omega'_2, ..., \Omega'_n\} \subset \mathcal{F}$, todos de medida positiva com respeito a $\mathbb{P}$, tal que, para cada $f \in \Xi$ há índice $1 \leqslant i(f) \leqslant n$ para o qual*

$$osc^B|_{\Omega'_{i(f)}}(f) < \varepsilon.$$

Dizemos ainda que uma sequência $\{f_n\} \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ *satisfaz o critério sequencial de Bocce se, para cada subsequência* $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ *e para quaisquer* $\varepsilon > 0$ *e* $\Omega' \in \mathcal{F}$ *com* $\mathbb{P}(\Omega') > 0$*, há subconjunto* $\Omega'' \subset \Omega'$ *ainda de probabilidade positiva com respeito a* $\mathbb{P}$ *tal que*

$$\liminf_{k\to\infty} osc^B|_{\Omega''}(f_{n_k}) < \varepsilon.$$

É uma consequência imediata da aplicação do princípio da casa dos pombos que se um conjunto $\Xi \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ satisfaz o critério de Bocce, qualquer sequência $\{f_n\} \subset \Xi$ satisfaz o critério sequencial de Bocce.

Enunciamos a seguir o Teorema 4.5 de [BGJ94], o qual estabelece condições necessárias e suficientes para a convergência (no sentido forte) de uma sequência $\{f_n\}$.

Teorema 2.19. *Uma sequência* $\{f_n\} \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ *converge para* $f_0 \in L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ *se, e somente se,*

(i) $\{f_n\}$ *converge fracamente para* f_0*;*

(ii) $\{f_n\}$ *satisfaz o critério sequencial de Bocce;*

(iii) $\{f_n\}$ *é tight.*

Pelas hipóteses adotadas até o momento, garantimos que a sequência $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é *tight* e converge fracamente para u_{Boc}. Na proposição a seguir, propomos uma hipótese adicional sobre o operador de transferência a fim de que a sequência $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaça também o critério sequencial de Bocce.

Proposição 2.20. *Sejam* (Σ, Θ) *um STFA uniformemente aperiódico com* $\log \ell(\omega) \in L^1(\mathbb{P})$ *e* $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ *um potencial aleatório cumprindo a hipótese (HB). Suponha ainda que o conjunto* $\left\{-\dfrac{1}{t_n}\log\left(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_n\phi}(\omega)1\right)\right\}_{n,N\in\mathbb{N}} \subset L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$ *satisfaz o critério de Bocce, onde* $\tilde{\mathcal{L}}_{t_n\phi}(\omega) = \dfrac{1}{\lambda_{t_n}(\omega)}\mathcal{L}_{t_n\phi}(\omega)$*. Então,* $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz o critério sequencial de Bocce.*

Para a demonstração dessa proposição utilizaremos a proposição a seguir que é baseada em [MSU10, Proposição 3.17].

Proposição 2.21. *Sejam* (Σ, Θ) *um STFA e* $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ *satisfazendo as hipóteses (HB) e (HL). Então, para cada* $t > 1$*, existe uma constante* $0 < L_t < 1$ *que depende apenas de* $t\phi$ *e uma função mensurável* $A_t \colon \Omega \to (0, \infty)$ *tais que*

$$\left\|\left(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t\phi}(\omega)1\right) - h\right\|_\omega \leqslant A_t(\omega)\cdot L^N_t.$$

Demonstração da Proposição 2.20. Sejam $\{u_{t_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$ e $\Omega' \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(\Omega') = \eta > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, afirmamos que há $N(k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid \big\|u_{t_{n_k}} - \big(-\frac{1}{t_{n_k}}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^{N(k)}_{t_{n_k}\phi}1\big)\big)\big\|_\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\}\right) > 1 - \frac{\eta}{2^{k+1}}.$$

Antes de provar esta afirmação, note que, se denotarmos por Ω'_k o conjunto acima e $\Omega'' = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega'_k$, segue que $\mathbb{P}(\Omega'') > 1 - \frac{\eta}{2}$. Assim, $\mathbb{P}(\Omega'' \cap \Omega') > \frac{\eta}{2}$. Logo, sendo $\Omega''' \subset \Omega' \cap \Omega''$ conjunto de probabilidade positiva qualquer, resulta que

$$\liminf_{k\in\mathbb{N}} osc^B|_{\Omega'''}(u_{t_{n_k}}) \leqslant \liminf_{k\in\mathbb{N}} \big[\frac{\varepsilon}{2} + osc^B|_{\Omega'''}\big(-\frac{1}{t_{n_k}}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^{N(k)}_{t_{n_k}\phi}1\big)\big)\big].$$

Como supomos que o conjunto $\big\{-\frac{1}{t_n}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^{N}_{t_n\phi}(\omega)1\big)\big\}_{n,N\in\mathbb{N}}$ satisfaz o critério de Bocce, basta considerar $\Omega''' \subset \Omega'' \cap \Omega'$ conjunto de medida positiva para $\mathbb{P}$ para o qual

$$\liminf_{k\in\mathbb{N}} osc^B|_{\Omega'''}\big(-\frac{1}{t_{n_k}}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^{N(k)}_{t_{n_k}\phi}1\big)\big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de modo que $\liminf_{k\in\mathbb{N}} osc^B|_{\Omega'''}(u_{t_{n_k}}) < \varepsilon$, provando assim o critério de Bocce para a sequência de funções aleatórias $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Para demonstrar a afirmação, assinalamos propriedade dos logaritmos: para constantes positivas $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, com $a > b$, temos

$$\log(a+b) < \log(a) + c \Leftrightarrow b < a\cdot(\mathrm{e}^c - 1) \quad e \quad \log(a-b) > \log(a) - c \Leftrightarrow b < a\cdot(1-\mathrm{e}^{-c}).$$

Pela Proposição 2.21, para quase todo $\omega \in \Omega$, existe $N_0(\omega)$ tal que, $\forall\, N > N_0$, temos

$$\big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega)1\big)(\omega, x) > \frac{h_{t_{n_k}}(\omega, x)}{2} > 0.$$

Em particular, temos que a função aleatória $\big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega)1\big)(\omega, x)$ é uniformemente limitado inferiormente em $\Sigma(\omega)$ por $\dfrac{1}{2C_{t_{n_k}\phi}(\omega)}$.

Então, fixando primeiro $\omega_0 \in \Omega$ para o qual a desigualdade acima é satisfeita, como $A_{t_{n_k}}(\omega_0)\cdot L^N_{t_{n_k}}$ vai a zero quando $N \to \infty$, existe constante $N(k, \omega_0) > N_0$ tal que, se $N > N(k,\omega_0)$, temos

$$A_{t_{n_k}}(\omega_0)\cdot L^N_{t_{n_k}} < \frac{1}{2C_{t_{n_k}\phi}(\omega_0)}\cdot \max\{1-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{4}},\ \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{4}}-1\}. \tag{2.8}$$

Novamente utilizando a Proposição 2.21, temos que, para $N > N(k,\omega_0)$,

$$\begin{aligned}-A_{t_{n_k}}(\omega_0)\cdot L^N_{t_{n_k}} + \big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega_0)1\big)(\omega_0,x) \leqslant h_{t_{n_k}}(\omega_0,x) \leqslant \\ \leqslant A_{t_{n_k}}(\omega_0)\cdot L^N_{t_{n_k}} + \big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega_0)1\big)(\omega_0,x).\end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo na desigualdade acima e dividindo por $-t_{n_k}$, resulta que

$$\begin{aligned}-\frac{1}{t_{n_k}}\log\Big(-A_{t_{n_k}}(\omega_0)\cdot L^N_{t_{n_k}} + \big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega_0)1\big)(\omega_0,x)\Big) \geqslant u_{t_{n_k}}(\omega_0,x) \geqslant \\ \geqslant -\frac{1}{t_{n_k}}\log\Big(A_{t_{n_k}}(\omega_0)\cdot L^N_{t_{n_k}} + \big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega_0)1\big)(\omega_0,x)\Big).\end{aligned}$$

Daí, pela observação feita a respeito do logaritmo e pela escolha de $N(k,\omega_0)$, concluímos que

$$\frac{\varepsilon}{4}-\frac{1}{t_{n_k}}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega_0)1\big)(\omega_0,x) \geqslant u_{t_{n_k}}(\omega_0,x) \geqslant -\frac{1}{t_{n_k}}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}(\theta^{-N}\omega_0)1\big)(\omega_0,x)-\frac{\varepsilon}{4},$$

ou seja,

$$\big\| u_{t_{n_k}} - \big(-\frac{1}{t_{n_k}}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_{n_k}\phi}1\big)\big)\big\|_{\omega_0} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Para concluir, basta mostrar que podemos escolher $N(k)$ para o qual o conjunto dos pontos $\omega_0 \in \Omega$ que satisfazem a desigualdade acima possui medida maior que $1-\frac{\eta}{2^{k+1}}$. Seja então $\Omega'_{k,N}$ o conjunto dos elementos $\omega_0 \in \Omega$ para os quais a desigualdade (2.8) se cumpre a partir de N. Claramente, $\Omega'_{k,N} \subset \Omega'_{k,N+1}$. Ademais, quase todo ω obviamente verificará a desigualdade (2.8) para N suficientemente grande. Assim, $\bigcup_N \Omega'_{k,N}$ é um conjunto de massa total com respeito a $\mathbb{P}$ e é possível encontrar $N(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega'_k := \Omega'_{k,N(k)}$ possui probabilidade maior que $1-\frac{\eta}{2^{k+1}}$. □

Finalizamos com a construção da subação aleatória calibrada para o potencial aleatório ϕ.

Teorema 2.22. *Sejam (Σ,Θ) um STFA uniformemente aperiódico com $\log \ell(\omega) \in L^1(\mathbb{P})$ e $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ um potencial aleatório cumprindo a hipótese (HB). Suponha também que* *o conjunto* $\big\{ -\dfrac{1}{t_n}\log\big(\tilde{\mathcal{L}}^N_{t_n\phi}(\omega)1\big)\big\}_{n,N\in\mathbb{N}}$ *satisfaz o critério de Bocce. Então, o potencial aleatório* ϕ *admite subação aleatória calibrada.*

Demonstração. Pelo que foi discutido anteriormente nessa seção, com as hipóteses assumidas nesse teorema, temos que o Teorema 2.14, o Lema 2.16 e a Proposição 2.20 garantem que a sequência $\{u_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, a qual converge fracamente para u_{Boc}, cumpre as hipóteses do Teorema 2.19, ou seja, $u_{t_n} \to u_{Boc}$ em $L^1_{Boc}(\mathbb{P}, E)$.

Em função dessa convergência forte, podemos extrair subsequência $\{u_{t_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, para quase todo $\omega \in \Omega$, $u_{t_{n_k}}(\omega, x) \to u_{Boc}(\omega, x)$, $\forall\ x \in \Sigma(\omega)$. Resta então repetir a argumentação utilizada na demonstração da Proposição 2.8 para concluir que u_{Boc} é subação aleatória calibrada para o potencial aleatório ϕ, com valor ergódico maximal aleatório Λ_{Boc}. $\square$

Referências

[AR66] L. M. Abramov e V. A. Rohlin, “The entropy of a skew product of measure-preserving transformation”, *Transactions of the American Mathematical Society* **48** (1966), 255-265.

[Ar98] L. Arnold, “Random Dynamical Systems”, *Springer Monographs in Mathematics* (1998).

[AB09] A. Avila e J. Bochi, “On the subadditive ergodic theorem”, *Manuscrito* (2009).

[BGJ94] E. J. Balder, M. Girardi e V. Jalby, “From weak to strong types of L^1_E-convergence by the Bocce criterion”, *Studia Mathematica* **111**, Polish Academy of Sciences, (1994), 241-262.

[BLL11] A. T. Baraviera, R. Leplaideur e A. O. Lopes, “Selection of Ground States in the Zero Temperature Limit for a One-Parameter Family of Potentials”, *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems* **11** (2011), 243-260.

[Bog92] T. Bogenschutz, “Entropy, pressure, and a variational principle for random dynamical systems”, *Random and Computational Dynamics* **1** (1992), 99-116.

[BC92] T. Bogenschutz e H. Crauel, “The Abramov-Rokhlin formula”, *Lecture Notes in Mathematics* **1515**, Springer, Nova Iorque, (1992), 32-35.

[BG95] T. Bogenschutz e V. M. Gundlach, “Ruelle’s transfer operator for random subshifts of finite type”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **15** (1995), 413-447.

[Bou01] T. Bousch, “La condition de Walters”, *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure* **34** (2001), 287-311.

[BJ02] T. Bousch e O. Jenkinson, “Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions”, *Inventiones mathematicae*, **148** (2002), 207–217.

[CV77] C. Casting e M. Valadier, “Convex Analysis and Measurable Multifunctions”, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **580** (1987, Springer: Nova Iorque, Berlin.

[Co01] G. Contreras, “Action potential and weak KAM solutions”, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **13** (2001), 427-458.

[CLT01] G. Contreras, A. O. Lopes e Ph. Thieullen, "Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle", *Ergodic Theory e Dynamical Systems* **21** (2001), 1379-1409.

[CG93] J. P. Conze e Y. Guivarc'h, "Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel", pré-publicação (1993).

[Cr86] H. Crauel, "Lyapunov exponents and invariant measures of stochastic systems on manifolds", *Lecture Notes in Mathematics* **1186**, Springer Verlag, (1986), 273-291.

[Cr02] H. Crauel, "Random Probability Measures on Polish Spaces", *Stochastics Monographs* **11** (2002).

[DKS08] M. Denker, Y. Kifer e M. Stadlbauer, "Thermodynamic formalism for random countable Markov shifts", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **22** (2008), 131-164.

[DU77] J. Diestel e J. J. Uhl Jr, "Vector Measures", *Mathematical Surveys* **15** (1977).

[Fa97] A. Fathi, "Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens",*Comptes Rendus Mathemátique de l'Acadéie des Sciences des Paris* **324** (1997), 1043–1046.

[FK34] G. Fichtenholz e L. Kantorovitch, "Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées", *Studia Mathematica* 5.1 (1934), 69-98.

[FG89] L. M. Floria e R. B. Griffiths, "Numerical procedure for solving a minimization eigenvalue problem", *Nuerische Math* **55** (1989), 565-574.

[Ga18] E. Garibaldi, "Ergodic Optimization in the Expanding Case: Concepts, Tools and Applications", *SpringerBriefs in Mathematics* (2018)

[GLT09] E. Garibaldi, A. O. Lopes e Ph. Thieullen, "On calibrated and separating subactions", *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* **40** (2009), 577-602.

[Gu95] V. M. Gundlach, "Chaos in random dynamical systems", *Preceedings of International Conference on Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems*, Zakopane (1995).

[Gu97] V. M. Gundlach, "Thermodynamic Formalism for Random Subshifts of Finite Type", *Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems*, Cambridge University Press (1997), 1-15.

[Ha74] P. R. Halmos, "Measure Theory", *Graduate Texts in Mathematics* **18**, Springer, New York, (1974).

[HY52] E. Hewitt e K. Yosida, "Finitely additive measures", *Transactions of the American Mathematical Society* **72** (1952), 46-66.

[Je06] O. Jenkinson, "Ergodic optimization", *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **15** (2006), 197-224.

[KL06] Y. Kifer. P. D. Liu, "Random Dynamics", *Handbook of Dynamical Systems* **1B** (2006).

[Ki08] Y. Kifer, "Thermodynamic formalism for random transformations revisited", *Stochastics and Dynamics* **8** (2008), 77-102.

[LT03] A. O. Lopes e P. Thieullen, "Subactions for Anosov diffeomorphisms", *Astérisque* **287** (2003), 115-130.

[MSU10] V. Mayer, B. Skorulski e M. Urbański, "Distance Expanding Random Mappings, Thermodynamic Formalism, Gibbs Measures and Fractal Geometry", *Lecture Notes in Mathematics* **2036** (2011).

[Nu91] R. D. Nussbaum, "Convergente of iterates of a nonlinear operator arising in statistical mechanics", *Nonlinearity* **4** (1991), 1223-1240.

[PP90] W. Parry e M. Pollicott, "Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics", *Astérisque* **187-188**, Société Mathématique de France, Paris, 1990.

[QS11] A. Quas e J. Siefken, "Ergodic optimization of super-continuous funcions in the shift", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **32** (2011).

[Sa99] S. V. Savchenko, "Cohomological Inequalities for Finite Topological Markov Chains", *Functional Analysis and Its Applications* **33** (1999), 237-238.

[SU14] D. Simmons e M. Urbanski, "Relative equilibrium states and dimensions of fiberwise invariant measures for distance expanding random maps", *Stochastics and Dynamics* **14** (2014).

[St10] M. Stadlbauer, "On random topological Markov chains with big images and preimages", *Stochastics and Dynamics* **10** (2010), 77-95.

[St17] M. Stadlbauer, "Coupling methods for random topological Markov chains", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **37** (2017), 971-994.

[Th87] Ph. Thieullen, "Fibres dynamiques asymptotiquement compacts exposants de Lyapunov. Entropie. Dimension", *Annales de L'Institute Henri Poincaré* **4** (1987), 49-97.

[Ul91] A. Ülger, "Weak compactness in $L^1(\mu, X)$", *American Mathematical Society* **113** (1991), 143-149.

[Wa82] P. Walters, "An introduction to ergodic theory", *Graduate Texts in Mathematics* **79**, Springer, New York, (1982).