Matemática Discreta - MM220
Quinta Lista
Princípio da casa dos pombos

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br
IG: @cafematematico.ponce

Problema 1. Dados arbitrariamente doze números inteiros, mostre que é sempre possível escolhermos dois deles, de modo que sua diferença seja divisível por 11.

Problema 2. Em 2023, Hogwarts recebeu 523 estudantes ansiosos para aprender mais sobre o mundo mágico que os cerca e nada como a matemática para deixar Hogwarts ainda mais mágica. Os estudantes são divididos, pelo famoso chapéu seletor, nas casas: Grifinória, Sonserina, Lufa-lufa e Corvinal.

a) Mostre que em alguma das casas haverá pelo menos 131 estudantes.

b) Cermione, Barry e Aone estavam entre estes 2023. De quantas maneiras o chapéu seletor pode realizar a distribuição dos 2023 estudantes de forma que estes 3 fiquem na mesma casa?

c) No dia anterior à seleção o chapéu seletor dormiu mal. Provavelmente foi em uma festa de chapéus e voltou tarde, ou maratonou alguma série muito interessante. Assim, no dia da seleção, ao invés de fazer todo o trabalho de analisar a personalidade dos estudantes, ele simplesmente distribuiu todos de forma aleatória nas casas (o chapéu muito provavelmente irá para as masmorras por ter feito isso). Qual a probabilidade de Cermione, Barry e Aone tenham caído na mesma casa?

d) Ao chegar no seu quarto, Barry percebe que dividirá o quarto com outros 5 estudantes. Prove que no quarto de Barry existem três estudantes que se conhecem (se conhecer é algo mútuo aqui) ou três estudantes que se desconhecem entre si.

Problema 3. Escolhem-se, ao acaso, nove pontos em um cubo de aresta 2. Prove que sempre existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância um do outro de, no máximo, $\sqrt{3}$.

Problema 4. Em cada casa de um tabuleiro 3×3, um dos números 1, -1 ou 0 foi escrito. Prove que, após calcularmos as somas dos números de cada linha, coluna e diagonal do tabuleiro, encontraremos pelo menos duas somas iguais.

Problema 5. Um conjunto S possui 8 números naturais, todos eles entre 1 e 13. Mostre que existem quatro subconjuntos $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset S$, tais que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$, e a soma dos elementos de A_i é a mesma para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Problema 6. Mostre que todo inteiro positivo n possui um múltiplo que se escreve, na base 10, somente com os algarismos 0 e 1.

Problema 7. A soma de nove números inteiros é 27. Mostre que é sempre possível encontrarmos dois desses nove números cuja soma seja maior ou igual a 6.
Dica: Tente calcular a média aritmética da soma de todos os possíveis pares de números dentre estes nove.

Problema 8. Mostre que, dentre seis números irracionais, sempre existem três tais que a soma de quaisquer dois deles também é irracional.