

Matemática Discreta - MM220  
Quarta Lista  
Relações de recorrência

Prof. Gabriel Ponce  
IMECC- UNICAMP  
gaponce@ime.unicamp.br  
IG: @cafematematico.ponce

Atenção: Quase todos os problemas foram retirados do livro do Plínio.

**Problema 1.** Resolva as seguintes relações de recorrência

- a)  $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$  para  $n \geq 2$  e  $a_0 = 8, a_1 = 10$ .
- b)  $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3}$  para  $n \geq 3, a_0 = 3, a_1 = 3$  e  $a_2 = 7$ .
- c)  $a_n = 2 \cdot a_{n-1} \cdot \cos \alpha - a_{n-2}, n \geq 3, a_1 = \cos \alpha$  e  $a_2 = \cos(2\alpha)$ .

**Problema 2.** Resolva as seguintes relações de recorrências:

- a)  $a_n = 2a_{n-1} + n^2, n \geq 1, a_0 = 1$ ;
- b)  $a_n = -2a_{n-1} + 8a_{n-2} + \frac{27}{25} \cdot 5^n$ , para  $n \geq 2, a_0 = 0$  e  $a_1 = -9$ .
- c)  $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} + 6n^2 - 40n + 49$ , para  $n \geq 4$  e  $a_1 = 3, a_2 = 15, a_3 = 41$ .

**Problema 3.** Se a equação de recorrência  $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$  tem solução da forma  $A \cdot 3^n + B \cdot 6^n$ , determine  $c_1$  e  $c_2$ .

**Problema 4.** Pedrinho adora lançar moedas. Um dia ele decide lançar moedas e observar se ocorrem duas caras sucessivas. Denote por  $a_n$  o número de maneiras

de Pedrinho lançar a moeda  $n$  vezes e observar a ocorrência de 2 caras. Determine uma relação de recorrência para  $a_n$  e a resolva.

**Problema 5.** Em quantas regiões o plano é dividido por  $n$  retas que passam pela origem?

**Problema 6.** Seja  $a_n$  o número de permutações dos números  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  tais que cada elemento difere de um unidade de algum elemento à sua esquerda na permutação. Construa e resolva uma relação de recorrência para  $a_n$ .

**Problema 7.** Seja  $Y_l$  a renda nacional no tempo  $l$ . A seguinte equação de recorrência foi obtida a partir de teorias econômicas:

$$Y_t = \alpha(1 + \beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + 1, \quad t \geq 2,$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas. Supondo  $Y_0 = 2$ ,  $Y_1 = 3$ ,  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 1$ , ache a função geradora da sequência  $(Y_t)$ .

**Problema 8.** Mostre que os números de Fibonacci satisfazem :

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k},$$

para  $n \geq 1$ .

**Problema 9.** Seja  $a_n$  o número de maneiras de distribuir  $n$  casais em torno de uma mesa redonda, de maneira que homens e mulheres se alternem na distribuição e parceiros não sejam vizinhos. Deduza um sistema de relações de recorrência apropriado para  $a_n$ , definindo as outras sequências que forem necessárias.

**Problema 10.** Utilize funções geradoras para calcular a quantidade de triângulos com lados inteiros e perímetro múltiplo de 6.