Matemática Discreta - MM220
Segunda Lista
Combinações, arranjos e permutações

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br
IG: @cafematematico.ponce

Problema 1. (Exemplo 2.52 da bibliografia principal) Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano onde não há 3 deles que sejam colineares?

Problema 2. (Exemplo 2.51) Quantos anagramas da palavra UNIFORMES começam por consoante e terminam em vogal?

Problema 3. Simplifique

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

c) $\frac{(2n)!}{n!}$

d) $\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}$.

Problema 4. Há 15 estações num ramal de estradas de ferro. Quantos tipos de bilhetes devem ser produzidos pela companhia para que seja possível ir, com apenas um bilhete, de qualquer estação a qualquer outra estação?

Problema 5. Determine x para que

$$C_{15}^{x-1} = C_{15}^{2x+1}.$$

Problema 6. Mostre que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.

Problema 7. Em uma reunião todos os presentes se cumprimentaram com aperto de mão. Ao todo foram feitos 66 cumprimentos. Quantas pessoas estavam presentes na reunião?

Problema 8. Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os dígitos $2, 3, 5, 8$ e 9.

a) Quantos são estes números?

b) Quantos são menores do que 800?

c) Quantos são múltiplos de 5?

d) Quantos são ímpares?

Problema 9. Resolva o problema anterior assumindo que podemos repetir dígitos.

Problema 10. (Exemplo 2.55 da bibliografia principal) De quantas formas pode-se escolher 3 números distintos do conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ de modo que sua soma seja múltiplo de 3 ?

Problema 11. Quantos são os números inteiros de 5 algarísmos de forma que cada algarismo pertence ao conjunto $\{1, 5, 7\}$. Observe que pode haver repetição de números entre os algarismos, ou seja, 11111 e 55771 são possibilidades.

Problema 12. Em uma fila se encontram pessoas de 3 nacionalidades distintas: 3 são de nacionalidade americana, 4 de nacionalidade francesa e 5 de nacionalidade brasileira. De quantas maneiras essa fila pode ser organizada de forma que pessoas de mesma nacionalidade estejam juntas?

Problema 13. São dados os pontos A, B, C, D sobre uma reta m e A, F, G, H e I sobre uma reta n distinta de m. Quantos triângulos podem ser formados unido-se três destes pontos?

Problema 14. Dentre os números $1, 2, \ldots, 100$, de quantas maneiras diferentes podemos selecionar 2 inteiros de forma que:

1) a diferença entre eles seja exatamente 7 ?

2) a diferença entre eles seja menor ou igual a 7 ?

Problema 15. Mostre que o produto de quaisquer k inteiros consecutivos é divisível por $k!$

Problema 16. De quantas maneiras 22 livros podem ser distribuídos entre 5 estudantes (A,B,C,D,E) de modo que duas estudantes recebam pelo menos 5 livros.

Problema 17. Determine o coeficiente de a^5 em cada uma das expressões abaixo:

a) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^7$

b) $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^5$

c) $(a + a^3)^3$

d) $(\frac{1}{a} + a^2)^{2023}$.

Problema 18. Prove que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2,$$

para $n > 1$.

Problema 19. Determine m sabendo que

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \ldots + \binom{m}{m-1} = 254.$$

Problema 20. Quantas são as soluções inteiras positivas da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 17,$$

de forma que $x_4 \geq 3$.

Problema 21. Sabendo que a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

possui 10 soluções inteiras positivas, determine n.

Problema 22. De quantas formas podemos distribuir 30 laranjas para 4 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 2 laranjas?

Problema 23. De quantas formas 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, sendo que 2 determinadas pessoas não devem estar lado a lado ?

Problema 24. Mostre que

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-p}{m-k} \cdot \binom{p}{k}.$$