Matemática Discreta - MM220
Primeira Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br
IG: @cafematematico.ponce

OBS: Os problemas $1-4$ foram adaptados do livro adotado na bibliografia da ementa e os problemas $5-9$ foram adaptados de materiais no site da OBMEP.

1 Princípio de Indução

Problema 1. Utilize o princípio de indução para provar as seguintes identidades:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$.

c) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$.

d) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$.

Problema 2. Utilize o princípio de indução para provar as seguintes desigualdades:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq 2 - \frac{1}{n}$.

b) $2^n < \prod_{j=1}^{n} j$, para todo $n \geq 4$

c) $n^2 < \prod_{j=1}^{n} j$, para todo $n \geq 4$.

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, para todo $n > 1$

e) $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$, para todo $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Defina

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right).$$

a) Calcule os 7 primeiros termos e faça uma conjectura com relação a expressão de P_n.

b) Prove tal conjectura usando indução.

Problema 4. Seja (F_n) a sequência de Fibonacci. Prove, usando o princípio de indução que para todo inteiro positivo n valem:

a) $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$.

b) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

c) $F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n-2} = F_{2n-1}$.

d) $\sum_{j=1}^{2n} F_j F_{j+1} = F_{2n+1}^2 - 1$.

Problema 5. Mostre que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

Problema 6. Seja α tal que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, mostre que

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\operatorname{sen}(\alpha)},$$

para todo natural n.

Problema 7. Usando o princípio de indução mostre que

a) 80 divide $3^{4n} - 1$.

b) 9 divide $4^n + 6n - 1$.

Problema 8. Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por:

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Problema 9. Mostre que $n = 32$ é o menor valor para o qual a equação

$$5x + 9y = n$$

possui solução em $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$, para todo $n \geq n_0$.

Problema 10. Descubra quem é maior e use indução para provar sua tese:

$$n! \quad ou \quad e^n.$$

Problema 11. Descubra quem é maior e use indução para provar sua tese:

$$n^3 \quad ou \quad e^n.$$