Análise 1 - MA502 & MM202 - Primeira Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

RA:

1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b	4.c	5

Instruções:

- Coloque RA em **TODAS** as folhas, NÃO coloque seu nome em nenhuma folha;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu. No caso de você resolver todas as questões $1-4$, serão corrigidas apenas as 3 primeiras.

Questões escolhidas:

Escolha 3 **questões dentre os problemas** $1-4$**.**

Problema 1**:** (2.5)

a) (1.0) Seja $0 < c < 1$ um número real fixado e $A \subset (0, 1/c)$, $B \subset (c, +\infty)$, definimos

$$\frac{A}{B} := \left\{ \frac{a}{b} : \ a \in A, b \in B \right\}.$$

Mostre que

$$\sup\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\sup A}{\inf B}.$$

b) (1.5) Sejam a, b números reais positivos tais que $a + b = 1$. Mostre que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1}.$$

Problema 2**:** (2.5)

a) (0.5) Defina

- Conjunto enumerável;
- Conjunto não-enumerável.

b) (2.0) Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Mostre que se A for enumerável então B também deve ser enumerável.

Problema 3: (2.5) Seja (X, d) um espaço métrico.

a) (1.0) Defina

- Ponto interior de um conjunto $E \subset X$;
- Ponto de acumulação de um conjunto $E \subset X$;

b) (1.5) Seja $E \subset X$, denote por E° o conjunto de todos os pontos interiores de E. Prove que

$$X \setminus E^\circ = \overline{X \setminus E}.$$

Problema 4: (2.5) Seja (X, d) um espaço métrico.

a) (1.0) Defina conjunto compacto.

b) (0.5) Mostre que nenhum intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, onde $\mathbb{R}$ está sendo tomado com a métrica usual.

c) (1.0) Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto não vazio, onde $\mathbb{R}$ está sendo tomado com a métrica usual. Prove que K não pode ser aberto.

Resolva a questão 5.

Problema 5: (2.5) Seja (X, d) um espaço métrico e $K_1, K_2 \subset X$ dois subconjuntos compactos de X com $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, mostre que existem abertos U_1 e U_2 tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$.

Boa prova!!