Análise 1 - MA502 & MM202 - Primeira Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

RA:

1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b	4.c	5

Instruções:

- Coloque RA em **TODAS** as folhas, NÃO coloque seu nome em nenhuma folha;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu. No caso de você resolver todas as questões $1-4$, serão corrigidas apenas as 3 primeiras.

Questões escolhidas:

Escolha 3 questões dentre os problemas $1-4$.

Problema 1: (2.5)

a) (1.0) Seja $0 < c < 1$ um número real fixado e $A \subset (0, 1/c)$, $B \subset (c, +\infty)$, definimos

$$\frac{A}{B} := \left\{ \frac{a}{b} : \ a \in A, b \in B \right\}.$$

Mostre que

$$\sup\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\sup A}{\inf B}.$$

b) (1.5) Sejam a, b números reais positivos tais que $a + b = 1$. Mostre que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1}.$$

Solução:

a) Como A e B são subconjuntos limitados, tanto superiormente quanto inferiormente, de fato existem $\sup A$ e $\inf B$. Vamos mostrar o pedido provando separadamente que $\frac{\sup A}{\inf B}$ é cota superior de $\frac{A}{B}$ e depois que é a menor cota superior.

i) $\frac{\sup A}{\inf B}$ é cota superior de $\frac{A}{B}$.
Prova: Pela definição de sup e inf sabemos que, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$ temos:

$$a \leq \sup A, \quad \inf B \leq b.$$

Assim,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{\sup A}{\inf B}, \quad \forall a \in A, b \in B,$$

o que implica que $\frac{\sup A}{\inf B}$ é cota superior de $\frac{A}{B}$.

ii) Se $\gamma < \frac{\sup A}{\inf B}$ então γ não é mais cota superior de $\frac{A}{B}$.
Prova: Observe que

$$\gamma < \frac{\sup A}{\inf B} \Rightarrow \gamma \cdot \inf B < \sup A.$$

Pela definição de $\sup A$, segue que $\gamma \cdot \inf B$ não pode ser cota superior de A. Assim existe $a' \in A$ tal que

$$\gamma \cdot \inf B < a'.$$

Logo

$$\inf B < \frac{a'}{\gamma},$$

o que implica, pela definição de $\inf B$ que $\frac{a'}{\gamma}$ não pode ser cota inferior de B, isto é, existe $b' \in B$ tal que

$$b' < \frac{a'}{\gamma}.$$

Assim temos $\gamma < \frac{a'}{b'}$, o que implica que γ não pode ser cota superior de $\frac{A}{B}$.

Assim, concluímos que $\frac{\sup A}{\inf B}$ de fato é o supremo de $\frac{A}{B}$, isto é, provamos que $\sup\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\sup A}{\inf B}$.
□

b) Considere $x_1 = \frac{a}{\sqrt{b+1}}$, $x_2 = \frac{b}{\sqrt{a+1}}$ e $y_1 = \sqrt{b+1}$, $y_2 = \sqrt{a+1}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leq (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \Rightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{b+1}} \cdot \sqrt{b+1} + \frac{b}{\sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{a+1}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1}\right) \cdot (b+1+a+1)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1}\right) \cdot (a+b+2).$$

Usando o fato que $a+b=1$ na última inequação temos:

$$1 \leq 3\left(\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \left(\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1}\right),$$

como queríamos demonstrar. □

Problema 2: (2.5)

a) (0.5) Defina

- Conjunto enumerável;
- Conjunto não-enumerável.

b) (2.0) Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Mostre que se A for enumerável então B também deve ser contável.

Solução:
b) Para cada elemento $b \in B$ considere o conjunto

$$A_b := \{a \in A : \quad f(a) = b\},$$

em outras palavras, o conjunto A_b é a pré-imagem $f^{-1}(\{b\})$. Para cada $b \in B$ escolha um elemento arbitrário $a_b \in A_b$. Defina a função $g : B \to A$ dada por:

$$g(b) := a_b.$$

Observe que g é injetora pois se $g(b) = g(c)$ então $a_b = a_c$. Mas isto implicaria

$$b = f(a_b) = f(a_c) = c.$$

Assim, como g é injetora, B é equivalente à imagem $g(B)$. Como $g(B) \subset A$ e A é enumerável então $g(B)$ é contável, por um resultado visto em sala. Logo B é contável como queríamos demonstrar.

Problema 3: (2.5) Seja (X, d) um espaço métrico.

a) (1.0) Defina

- Ponto interior de um conjunto $E \subset X$;
- Ponto de acumulação de um conjunto $E \subset X$;

b) (1.5) Seja $E \subset X$, denote por E° o conjunto de todos os pontos interiores de E. Prove que

$$X \setminus E^\circ = \overline{X \setminus E}.$$

Solução:

b) Vamos fazer a prova em duas etapas.

Parte 1. Vamos provar que $X \setminus E^\circ \subset \overline{X \setminus E}$.
Tome $x \in X \setminus E^\circ$. Então $x \notin E^\circ$, ou seja, x não é ponto interior de E. Se $x \in E^c$ então $x \in E^c \cup (E^c)' = \overline{(E^c)}$. Suponha então que $x \in E$. Neste caso, como $x \notin E^\circ$ isto significa que para todo $r > 0$, $B(x, r) \not\subset E$. Em particular

$$\forall r > 0, \quad B(x, r) \cap E^c \neq \emptyset.$$

MAs como $x \in E$ então na verdade temos

$$\forall r > 0, \quad (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap E^c \neq \emptyset,$$

o que implica que $x \in (E^c)' \subset \overline{(E^c)}$. Logo provamos que $X \setminus E^\circ \subset \overline{X \setminus E}$.

Parte 1. Vamos provar que $\overline{X \setminus E} \subset X \setminus E^\circ$.
Tome $x \in \overline{X \setminus E}$. Como $\overline{X \setminus E} = (E^c) \cup (E^c)'$ então $x \in E^c$ e/ou $x \in (E^c)'$. Se $x \in E^c$ então x não é ponto interior de E (pois todo ponto interior de E está também em E). Logo neste caso temos automaticamente que $x \in X \setminus E^\circ$. Suponha então que $x \in (E^c)'$. Assim, para todo $r > 0$ temos:

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap E^c \neq \emptyset.$$

Se $x \in E$ então isto é equivalente a $B(x, r) \cap E^c \neq \emptyset$, o que implica que $B(x, r)$ não pode estar contida em E, para todo $r > 0$. Neste caso segue que x não é ponto interior, ou seja, $x \in X \setminus E^\circ$. Finalmente, se $x \in E^c$ então, como já explicamos, $x \in X \setminus E^\circ$. Portanto, provamos que $\overline{X \setminus E} \subset X \setminus E^\circ$.

Juntando as partes 1 e 2 provamos o que queríamos. $\square$

Problema 4: (2.5) Seja (X, d) um espaço métrico.

a) (1.0) Defina conjunto compacto.

b) (0.5) Mostre que nenhum intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, onde $\mathbb{R}$ está sendo tomado com a métrica usual.

c) (1.0) Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto não vazio, onde $\mathbb{R}$ está sendo tomado com a métrica usual. Prove que K não pode ser aberto.

Solução:

b) Dado um intervalo aberto (a, b), para cada natural $n \geq 1$ considere $U_n := \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$. Observe que dado qualquer $x \in (a, b)$, como $x - a > 0$ e $b - x > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < x - a \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} < b - x.$$

Em particular

$$a + \frac{1}{m} < x < b - \frac{1}{m} \Rightarrow x \in U_m.$$

Ou seja,

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Suponha que exista uma subcobertura finita de (a, b), a partir da cobertura $\{U_n\}_n$. Digamos

$$(a, b) \subset U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \ldots U_{n_k}.$$

Tome $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Então

$$U_{n_j} = \left(a + \frac{1}{n_j}, b - \frac{1}{n_j}\right) \subset \left(a + \frac{1}{m}, b - \frac{1}{m}\right) = U_m, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Logo teríamos $(a, b) \subset U_m = \left(a + \frac{1}{m}, b - \frac{1}{m}\right)$ caindo em contradição.

Portanto (a, b) não pode ser compacto. $\square$

c) Considere $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Suponhamos por absurdo que K seja aberto.

Como K é compacto K é limitado, portanto possui supremo. Denote $p = \sup K$. Como K é compacto, K é fechado por um resultado visto em aula. Também por um resultado visto em sala, isto implica que $p = \sup K \in K$. Agora, como K é aberto, então p é ponto interior de K. Assim, existe $r > 0$ tal que

$$(p - r, p + r) \subset K.$$

Mas então $p + \frac{r}{2} \in K$, o que contradiz o fato que $p = \sup K$. Portanto K de fato não pode ser aberto, c.q.d.

Problema 5: (2.5) Seja (X, d) um espaço métrico e $K_1, K_2 \subset X$ dois subconjuntos compactos de X com $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, mostre que existem abertos U_1 e U_2 tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$.
Solução:

Primeiramente vamos relembrar algo provado em sala de aula:
Afirmação: Dado $p \notin K_1$, existe um aberto A_p e um raio $r_p > 0$ tal que: $K_1 \subset A_p$ e $A_p \cap B(p, r_p) = \emptyset$.
Prova: Para cada ponto $q \in K_1$ defina

$$U_q := B(q, d(p,q)/2), \quad V_q = B(p, d(p,q)/2).$$

Então $U_q \cap V_q = \emptyset$. Ainda, como $K_1 \subset \bigcup_{q \in K_1} U_q$ e K_1 é compacto, existem $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tais que

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{q_i}.$$

Tome agora

$$A_p := \bigcup_{i=1}^{n} U_{q_i} \quad \text{e} \quad B(p, r_p) := \bigcap_{i=1}^{n} V_{q_i}.$$

Como A_p é união de bolas abertas ele é um aberto. Ainda, como fizemos em sala, temos $A_p \cap B(p, r_p) = \emptyset$ pois caso contrário deveríamos ter algum j com $U_{q_i} \cap V_{q_i} \neq \emptyset$, o que não ocorre. Assim a afirmação está provada.

Agora vamos usar esta afirmação. Para cada ponto $p \in K_2$, considere A_p e $r_p > 0$ dadas pela aplicação da afirmação acima para p e K_1. Então

$$K_2 \subset \bigcup_{p \in K_2} B(p, r_p).$$

Como K_2 é compacto, existem $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tais que

$$K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i, r_{p_i}).$$

Finalmente defina

$$U_1 = \bigcap_{i=1}^{m} A_{p_i}, \quad U_2 = \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i, r_{p_i}).$$

Observe que U_2 é aberto, pois é união de abertos, e U_1 é aberto pois é uma interseção finita de abertos. Ainda $K_2 \subset U_2$ e $K_1 \subset U_1$ pois $K_1 \subset A_p$, para todo $p \in K_2$.

Basta então mostrar que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. De fato, se $x \in U_1 \cap U_2$ então existe algum $1 \leq i_0 \leq m$ tal que $x \in B(p_{i_0}, r_{p_{i_0}})$. Mas como $x \in U_1$ então $x \in A_{p_{i_0}}$, logo

$$B(p_{i_0}, r_{p_{i_0}}) \cap A_{p_{i_0}} \neq \emptyset$$

caindo em contradição com a construção destes conjuntos na afirmação 1. Portanto, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, concluindo o que queríamos demonstrar. $\square$