Introdução à Análise - MA507
Lista 4 - Funções contínuas

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

1 Revisão de funções

1. Faça o gráfico das funções $f(x) = x \cdot \text{sen}\,(1/x)$ e $g(x) = x^2 \cdot \text{sen}\,(1/x^2)$ definidas para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.* Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita crescente se:

$$x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Prove que toda função crescente é bijetora e sua inversa é decrescente (isto é, sua inversa f^{-1} satisfaz: $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$ se $x < y$.)

3.* Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $A, B \subset D$. Mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ e que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dê um exemplo em que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

4.(Seja $f : D \to Y$ uma função qualquer e $A, B \subset Y$. Prove que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

OBS: Lembre-se que aqui f^{-1} não denota a inversa de f já que essa inversa não precisa existir. A notação em questão se refere à imagem inversa de f.

5.* Prove que se f for injetora então $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo subconjunto A do domínio de f. Dê um exemplo de uma função não-injetora onde esse fato não se verifica.

6. Prove que se f for sobrejetora então $f(f^{-1}(A)) = A$ para todo subconjunto A do domínio de f. Dê um exemplo de uma função não-sobrejetora onde esse fato não se verifica.

7.[**OMU-2018**].* Seja p um número real fixado, determine todas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades

- $f(p) = g(p) = 0$;
- $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq p$;
- $f(x) + g(x)$ é um polinômio de grau 1;
- $f(x) \cdot g(x)$ é um polinômio de grau 2.

2 Continuidade de funções

8. Prove que o limite de $f(x)$ quando $x \to a$, se existir é único.

9. Dê exemplo de uma função descontínua para todo $x \in \mathbb{R}$ de forma que a função $|f(x)|$ seja contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Considere a função $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$.

1) Prove que f é descontínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Prove que $|f|$ é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Prove que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua.

12. Mostre que se $f, g : D \to \mathbb{R}$ são funções contínuas então: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ são contínuas.

13.* Mostre que todo polinômio é uma função contínua.

14.* Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

15.* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(1) = c$

iii) f é contínua.

16. Encontre todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a equação

$$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x, \quad \forall x.$$

18. Seja $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ uma função contínua que satisfaz a equação

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Prove que existe $c > 0$ tal que $f(x) = c^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.