Introdução à Análise - MA507
Lista 3 - Parte 1

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

1 Teorema de Bolzano-Weierstrass , pontos de aderência e critério de Cauchy

1. Defina o que é um ponto de aderência de uma sequência.

2. Prove que uma sequência $(a_n)_n$ converge para L se, e somente se, L for seu único ponto de aderência.

3. Sabendo que $\mathbb{Q}$ é enumerável, consideremos uma sequência $(a_n)_n$ tal que

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$

ou seja, esta sequência é formada por todos os racionais. Mostre que todo número real é ponto de aderência desta sequência.

4. Defina o que é uma sequência ser de Cauchy.

5. Prove que as seguintes sequências são de Cauchy:

a) $a_n := 1 + \frac{1}{n}$,

b) $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

6. Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sequências de Cauchy com $b_n \geq b > 0$ para todo $n \geq 1$. Prove que a sequência $\frac{a_n}{b_n}$ também é uma sequência de Cauchy.

2 Séries

7. Seja $(a_n)_n$ uma sequência. Defina o que é a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8. Escreva os 5 primeiros termos das séries:

   a) $\sum(1+\sqrt{n})$.

   b) $\sum(-1)^n$.

   c) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

   d) $\sum \frac{1}{n!}$.

9. Mostre que, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ fixados, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nr}$$

diverge.

10. Calcule as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e calcule o limite desta série.

11. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(n+a+1)} = \frac{1}{a}.$$

12. Mostre que se $\sum |a_n|$ for convergente então $\sum a_n$ também será convergente.

13. Calcule a soma parcial S_n da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

e prove que a série possui limite igual a 1.

14. Calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)}.$$

15. Prove que se a série $\sum a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.