

ChocOlimpíada de Análise 1 - 2022

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP

A data limite para entrega de soluções do problema 3 é: 23h:59min do dia 10/10/2022.

Problema 3. (80 pts) Considere a seguinte relação de equivalência em \mathbb{R}^2 :

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \text{ se } x_i - y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $[x]$ a classe de equivalência de x , isto é,

$$[x] := \{y \in \mathbb{R}^2 : x \sim y\}.$$

Defina conjunto \mathbb{T}^2 dado pelo quociente \mathbb{R}^2 / \sim , isto é, \mathbb{T}^2 é o conjunto de todas as classes de equivalência:

$$\mathbb{T}^2 := \{[x] : x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Em \mathbb{T}^2 definimos a função $d : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$d([x], [y]) = \inf\{\|a - b\| : a \in [x], b \in [y]\}.$$

- a) (50 pts) Prove que d é uma métrica em \mathbb{T}^2 .
- b) (80 pts) Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ a função definida por:

$$\pi(x) = [x],$$

prove que um subconjunto $U \subset \mathbb{T}^2$ é aberto se, e somente se, sua imagem inversa $\pi^{-1}(U)$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^2

OBS: O conjunto \mathbb{T}^2 definido acima é chamado de 2-toro.