ChocOlimpíada de Análise 1 - 2022

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP

Problema 3. Considere a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \text{ se } x_i - y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $[x]$ a classe de equivalência de x, isto é,

$$[x] := \{y \in \mathbb{R}^2 : \quad x \sim y\}.$$

Defina conjunto $\mathbb{T}^2$ dado pelo quociente $\mathbb{R}^2/\sim$, isto é, $\mathbb{T}^2$ é o conjunto de todas as classes de equivalência:

$$\mathbb{T}^2 := \{[x] : \quad x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Em $\mathbb{T}^2$ definimos a função $d : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ por:

$$d([x], [y]) = \inf\{||a - b|| : \quad a \in [x], b \in [y]\}.$$

a) (50 pts) Prove que d é uma métrica em $\mathbb{T}^2$.

b) (80 pts) Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ a função definida por:

$$\pi(x) = [x],$$

prove que um subconjunto $U \subset \mathbb{T}^2$ é aberto se, e somente se, sua imagem inversa $\pi^{-1}(U)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$

OBS: O conjunto $\mathbb{T}^2$ definido acima é chamado de 2-toro.

Solução:

Primeiramente, para que possamos entender melhor como funciona a distância dada, vamos provar o seguinte lema.

Lemma 0.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$. Para cada $a \sim x$ fixado, existe $b \sim y$ tal que*

$$||a - b|| = d([x], [y]).$$

Proof. Tome um certo $a \sim x$ qualquer. Considere uma divisão do plano em quadrados de lado 1 da seguinte forma:

$$Q_{i,j} := [i, i+1] \times [j, j+1], \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

O ponto a pertence a algum destes quadrados, digamos $a \in Q_{i_0,j_0}$. Chame $P_0 = Q_{i_0,j_0}$, $P_1 = Q_{i_0-1,j_0}$, $P_2 = Q_{i_0+1,j_0}$, $P_3 = Q_{i_0,j_0-1}$, $P_4 = Q_{i_0,j_0+1}$, $P_5 = Q_{i_0-1,j_0-1}$, $P_6 = Q_{i_0-1,j_0+1}$, $P_7 = Q_{i_0+1,j_0-1}$ e $P_8 = Q_{i_0+1,j_0+1}$, que são os quadrados ao redor do quadrado P_0.

Agora, dado $y \in \mathbb{R}^2$, cada quadrado P_i pode possuir no máximo 2 representantes de y. Logo, existe apenas uma quantidade finita de representantes $y_1, y_2, \ldots, y_k \in P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_6$, de y. Observe que dado qualquer outro representante $\widetilde{y}$ de y temos:

$$||a - \widetilde{y}|| > \max\{||a - y_i|| : \quad 1 \leq i \leq k\}.$$

Portanto concluímos que

$$\inf\{||a - b|| : \quad b \sim y\} = \min\{||a - y_i|| : \quad 1 \leq i \leq k\}.$$

Agora, observe que dado qualquer outro $a' \sim x$ temos $a' = a + (p, q)$ para certos inteiros p e q, o que implica que :

$$||a' - b|| = ||a - (b - (p, q))||,$$

portanto

$$\{||a' - b|| : \quad b \sim y\} = \{||a - b|| : \quad b \sim y\},$$

ou seja,

$$d([x].[y]) = \inf\{||u - b|| : \quad u \sim x, b \sim y\} = \inf\{||a - b|| : \quad b \sim y\} = \min\{||a - y_i|| : \quad 1 \leq i \leq k\}$$

donde segue que para algum $1 \leq i \leq k$ teremos:

$$d([x], [y]) = ||a - y_i||.$$

□

a) Vamos provar que d é uma métrica. Claramente $d([x],[y]) = d([y],[x])$ e $d([x],[x]) = 0$. Além disso, se $d([x],[y]) = 0$, pelo lema existem $x_0 \sim x, y_0 \sim y$ com $||x_0 - y_0|| = 0$. Logo $x_0 = y_0$ o que implica $[x_0] = [y_0]$.

Finalmente, basta provarmos a desigualdade triângular. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ defina:

$$A = \{||a - b|| : a \sim x, b \sim y\},$$

$$B = \{||b - c|| : b \sim y, c \sim z\},$$

e

$$C = \{||c - a|| : c \sim z, a \sim x\}.$$

Então, dados quaisquer $a \sim x, b \sim y$ e $c \sim z$ temos:

$$||c - a|| \leq ||c - b|| + ||b - a||.$$

Em particular

$$d([z],[x]) \leq ||c - a|| \leq ||c - b|| + ||b - a||.$$

para todos $a \sim x, b \sim y$ e $c \sim z$. Do lado direito, tome um a particular e selecione b (pelo lema do início) tal que $||b - a|| = d([x],[y])$. Assim, para todo $c \sim z$ temos

$$d([z],[x]) \leq ||c - b|| + d([x],[y]).$$

Finalmente, use o lema de novo para selecionar $c \sim z$ tal que $||c - b|| = d([z],[y])$ e a desigualdade triangular segue.

b) Primeiro, é essencial que consigamos entender como são as pré-imagens de bolas abertas em $\mathbb{T}^2$ ou, em outras palavras, qual é a relação entre as bolas definidas em $\mathbb{R}^2$ e as bolas definidas em $\mathbb{T}^2$.

Lemma 0.2. *Seja $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, então*

$$\pi^{-1}(B([x],r)) = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Z}} B(x + (a,b), r).$$

Proof. Dados $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, denote $V := \bigcup_{a,b\in\mathbb{Z}} B(x + (a,b), r)$.

Seja $y \in \pi^{-1}(B([x],r))$, temos $\pi(y) \in B([x],r)$. Logo, $d(\pi(y),[x]) < r$. Assim, pelo lema inicial, existe $y_0 \sim y$ tal que

$$||y_0 - x|| = d(\pi(y),[x]) < r.$$

Em particular $y_0 = y - (a,b)$ para algum $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $||y - (a,b) - x|| < r$, isto é,

$$||y - (x + (a,b))|| < r \Rightarrow y \in B(x + (a,b), r) \subset V.$$

Ou seja, provamos que $\pi^{-1}(B([x],r)) \subset V$. Agora tome $y \in V$. Então, existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

$$||y - (x + (a,b))|| < r.$$

Em particular temos:

$$d(\pi(y),[x]) \leq ||(y - (a,b)) - x|| < r.$$

Portanto $\pi(y) \in B([x],r)$ o que implica $y \in \pi^{-1}(B([x],r)$. Assim $V \subset \pi^{-1}(B([x],r))$, e o lemma está provado. $\square$

Usando este fato vamos demonstrar o pedido no enunciado. Suponha que $U \subset \mathbb{T}^2$ é um aberto. Tome $y \in \pi^{-1}(U)$ um ponto qualquer. Então, $\pi(y) \in U$, logo existe $r > 0$ tal que

$$B(\pi(y),r) \subset U.$$

Em particular, tomando a pré-imagem por π temos:

$$\pi^{-1}(B(\pi(y),r)) \subset \pi^{-1}(U).$$

Mas pelo Lema 0.2 temos então:

$$\bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} B(y + (a,b), r) \subset \pi^{-1}(U).$$

Em particular, $B(y,r) \subset \bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} B(y + (a,b), r) \subset \pi^{-1}(U)$, de onde segue que y é ponto interior de $\pi^{-1}(U)$. Assim, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, considere $U \subset \mathbb{T}^2$ e suponha que $\pi^{-1}(U)$ é aberto. Então, dado $x \in U$ qualquer temos que $\pi^{-1}(x) \subset \pi^{-1}(U)$. Tome qualquer ponto

$$x_0 \in \pi^{-1}(x).$$

Como $\pi^{-1}(U)$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \subset \pi^{-1}(U)$. Em particular,

$$\pi(B(x_0,r)) \subset \pi(\pi^{-1}(U)) = U. \tag{0.1}$$

Agora veja que para qualquer $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ temos $B(x_0 + (a,b), r) = B(x_0,r) + (a,b)$. Logo,

$$\pi(B(x_0 + (a,b), r)) = \pi(B(x_0,r)), \quad \forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Assim, como $x = [x_0]$ então, pelo Lema 0.2 temos $\pi^{-1}(B(x,r)) = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} B(x_0 + (a,b), r)$ o que implica, por (0.1), que:

$$B(x,r) = \pi(\pi^{-1}(B(x,r))) = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} \pi(B(x_0 + (a,b), r)) = \pi(B(x_0,r)) \subset U.$$

Portanto U é aberto, concluindo o que queríamos demonstrar.