Introdução à Análise - MA507 - Primeira Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

RA:

1.a	1.b	2.a	2.b	2.c	3	4.a	4.b	Total

Instruções:

- Coloque apenas seu RA na avaliação;
- Esta avaliação deve ser resolvida de forma **INDIVIDUAL**;
- Escreva os argumentos com coerência e coesão, lembre-se, o encadeamento lógico é importante para as soluções;
- **Início: 19:00, Término: 21:50**.

Problema 1:

a) (1.0) Defina o que é um corte dos racionais $\alpha = (E, D)$.

b) (1.5) Seja $\alpha = (E, D)$ um corte dos racionais, mostre que se $x_0 \in E$ então dado qualquer $y \in \mathbb{Q}$ com $y \leq x_0$, temos $y \in E$.

Problema 2: Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos limitados superiormente. Defina

$$A + B = \{a + b : \quad a \in A, b \in B\}.$$

a) (0.5) É verdade que A e B devem possuir supremo em $\mathbb{R}$? Justifique.

b) (1.0) Mostre que $\sup A + \sup B$ é uma cota superior para o conjunto $A + B$.

c) (1.0) Mostre que se $\gamma < \sup A + \sup B$, então γ não pode ser cota superior para $A + B$. Conclua que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Problema 3: (2.5) Determine, com as demonstrações necessárias, o ínfimo e o supremo do seguinte conjunto:

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{n}{m} : \quad 1 \leq n \leq m, \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

OBS: Pode ser útil se lembrar que a propriedade arquimediana garante o seguinte: dados quaisquer reais x, y com $x > 0$, existe um natural k tal que: $k \cdot x > y$.

Problema 4: (2.5)

a) (1.0) Sejam a, b, c números reais positivos tais que

$$a + b + c = 9,$$

mostre que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

b) (1.5) Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x^2 + 1| \leq 7$. Prove que

$$\left| \frac{x^2 + 2022}{x^2 - 2022} \right| \leq \frac{169}{168}.$$