Introdução à Análise - MA507
Lista 2

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

1 Sequências

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada uma das seguintes sequências

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

b) $a_n = 3 + 2(-1)^n$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.

2. Utilizando a definição de limite de sequências prove que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = 3$.

3. Utilizando propriedades de limites calcule o limite em cada um dos casos

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\cos\sqrt{n^2+7}}{n^2+1}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(1+8\sqrt{n})}{4n-1}$.

4. Prove que uma sequência $(a_n)_n$ só pode ter, no máximo, um limite.

5. Prove que se $a_n \to a$ então $|a_n| \to |a|$. A recíproca é verdadeira? (Dê um contra-exemplo).

6. Seja $h > 0$ um real fixado. Prove que a sequência $(a_n)_n$ dada por $a_n = \sqrt{n+h} - \sqrt{n}$, converge para 0.

7. Sabendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dado $0 < \gamma < 1$ qualquer, mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \geq N, \quad |a_n| > \gamma \cdot |a|.$$

8. Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ e $(c_n)_n$ três sequências com:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$
- $$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que a sequência $(b_n)_n$ também converge para α.

9. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1$.

2 Sequências Monótonas

10. Seja (a_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência convergindo para um limite L. Prove que (a_n) também converge para L.

11. Defina o que é uma sequência monótona. Mostre que se $(a_n)_n$ for uma sequência monótona e limitada então $(a_n)_n$ será convergente.

11. Construa uma sequência que possua uma subsequência convergindo para 2022 e outra convergindo para -2021.

12. Construa uma sequência com a seguinte propriedade: dado qualquer número real r, existe uma subsequência da sequência que você deu, que converge para r.

13. Dada uma sequência $(a_n)_n$ com $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$ com $c < 1$, mostre que $a_n \to 0$.

14.Dada uma sequência $(a_n)_n$ com $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to c$ com $c < 1$, mostre que $a_n \to 0$.

15. Prove que $5n^3 - 4n^2 + 7$ tende ao infinito.

16. Seja $p(n)$ um polonômio com coeficiente líder positivo, prove que $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.

17. Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ e que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$ para qualquer $a > 0$ fixado.

18. Prove que $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.