Introdução à Análise - MA507
Lista 1

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

1 Propriedades de números inteiros, racionais e cortes

1. Seja p um número natural primo e $m, n \in \mathbb{N}$. Utilize a fatoração em números primos para mostrar que se $p|mn$ então $p|m$ ou $p|n$.

2. Defina o que é um corte do conjunto dos racionais. Defina também a ordem, a soma e a multiplicação entre cortes.

3. Dado um corte (E, D), prove que se $e \in E$ e $x < e$ então $x \in E$.

4. Prove que dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, existem infinitos racionais p satisfazendo:

$$x < p < y.$$

5. Dados três números reais α, β e γ, prove que se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então devemos ter

$$\alpha < \gamma.$$

6. Seja $\alpha = (E, D)$ um número real, defina seu oposto $-\alpha$, isto é, exprima como é o corte $-\alpha$.

7. Sejam $\alpha_1 = (E_1, D_1), \alpha_2 = (E_2, D_2), \ldots, \alpha_k = (E_k, D_k)$ números reais. Determine o número real $\beta := \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

2 Supremo, ínfimo e propriedade do menor limitante superior

8. Defina os conceitos de supremo e ínfimo de subconjuntos de números reais.

9. Considere o conjunto $E = \{\frac{1}{m} : \ m \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\sup E = 1$ e que $\inf E = 0$.

10. Determine (com demonstração), o supremo e o ínfimo (caso existam) em $\mathbb{R}$ de cada um dos conjuntos abaixo:

a) $(0, 1)$.

b) $[-15, 7)$.

c) $(-\infty, 3)$.

d) $\{r \in \mathbb{R} : r^2 < 2\}$.

11. Utilize a propriedade do menor limitante superior para provar a propriedade do maior limitante inferior - isto é, que todo subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente possui ínfimo.

12. Dado $r \in \mathbb{R}$ qualquer, utilize a propriedade do menor limitante superior para provar que existe $y \in \mathbb{R}$ de forma que $y^2 = x$.

13. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não vazios e limitados inferiormente. Prove que

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

14. Dado $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina

$$\alpha \cdot A = \{\alpha \cdot r : \ r \in A\}.$$

Mostre que:

a) $\sup(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \sup A$ e $\inf(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \inf A$, caso $\alpha \geq 0$.

b) $\sup(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \inf A$, caso $\alpha < 0$.

3 Desigualdade triangular

15. Enuncie e demonstre a desigualdade triangular para números reais.

16. Um n'umero real x satisfaz $|x+1| < 2$. Mostre que

$$|(x+1)^2 - (x+1)| < 6.$$

17. Um n'umero real x satisfaz $|x+4| < 3$. Mostre que

$$|x^2 + 11 \cdot x + 27| < 19.$$

18. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$