Introdução à Análise - MA507
Lista 1 Parte 2

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Além das aulas ministradas por mim e pelo Ygor, vocês podem encontrar bastante coisa sobre Cauchy-Schwarz no portal da matemática Portal da Matemática. Na parte de aulas há duas aulas sobre esta desigualdade e, na parte de materiais, vocês podem pegar um pdf com explicações, aplicações e exercícios resolvidos sobre esta desigualdade.

1. Sejam a, b, c números reais positivos, mostre que

$$(a + 3b + c)^2 \leq 11 \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

2. Sejam a, b, c números reais positivos, mostre que

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}\right).$$

3. Sejam $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ números reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Prove que

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{2}$$

4. Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 29$. Prove que

$$2a + 3b + 4c \leq 29.$$

5. Sejam a, b números reais positivos tais que $a^2 + b^2 = 1$, mostre que

$$\frac{pa + qb}{\sqrt{p^2 + q^2}} \leq 1,$$

para todos p, q positivos.

6. Sejam a, b reais positivos tais que $a + b = \sqrt{2022}$, mostre que

$$\frac{2022}{a^2 + b^2} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

Conclua que:

$$1 < \frac{2022}{2022 - 2ab} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

7. Sejam a, b números reais positivos tais que $a + b = 1$. Mostre que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a + 1} + \frac{b^2}{b + 1}.$$

8. Sejam a, b números reais positivos tais que $a + b = 1$. Mostre que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{b + 1} + \frac{b^2}{a + 1}.$$

9. Sejam a, b, c números reais positivos, mostre que

$$9 \leq \left(\frac{2}{a + b} + \frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a} \right) \cdot (a + b + c).$$

10. Seja ABC um triângulo qualquer. Dado um ponto P no interior de ABC denote por D, E e F respectivamente os pés das alturas do ponto P com respeito aos lados BC, AC e AB. Determine P de forma que a expressão

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \tag{1.1}$$

assuma valor mínimo. Denotando por s e R o perímetro e a área de ABC respectivamente. Determine um limitante inferior para (1.1) em termos de R e s.