Introdução à Análise - MA507
Notas de aula 2022

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

Sumário

Capítulo 1

Os números reais e sua estrutura

O conjunto mais importante com o qual trabalharemos é o conjunto dos chamados números reais, denotado $\mathbb{R}$. Já trazemos, do ensino médio, um certo conhecimento do que são e como trabalhar com os números reais. De forma prática podemos definir números racionais, irracionais e reais da seguinte forma:

- Um número é dito racionais se sua representação decimal possui uma quantidade finita de casas após a vírgula ou possui uma quantidade infinita porém periódica: por exemplo

  - $0,2354863$
  - $4,123$
  - $20,3333333....$
  - $1,345345345345...$

  No caso de apresentar infinitos dígitos com um certo período, a notação pode ser "condensada" com um traço para indicar a repetição da sequência em questão. Por exemplo:

  $$20,\overline{3} := 20,3333333...., \quad 1,\overline{345} := 1,345345345345....$$

- Um número é dito irracional se ele não é racional, ou seja, se ele possui representação decimal com infinitos dígitos após a vírgula e sem nenhum período. (Em particular, é impossível escrever completamente um número irracional).

Esta definição, apesar de bastante prática e suficiente para os propósitos deste curso, possui alguns problemas formais relacionados à “boa definição” dos números irracionais. No que segue apresentaremos, com brevidade, como se dá a construção do conjunto dos números reais. Antes de prosseguirmos com a construção, iremos provar que os racionais $\mathbb{Q}$, em um certo sentido, possui “buracos” ou “descontinuidades”.

Proposition 1.0.1. *Não existe* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Prova. Suponhamos que exista um racional $\frac{p}{q}$ tal que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. A equação anterior nos dà $p^2 = 2q^2$, de onde concluímos que p^2 é par. Mas como a multiplicação de um número ímpar por outro ímpar é sempre ímpar, só podemos ter que p é par.

Assim podemos escrever $p = 2n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Substituindo na equação anterior obtemos:

$$(2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2.$$

Pelo mesmo argumento segue que q é par. Mas isto contradiz o fato que $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Logo, de fato, não existe nenhum racional cujo quadrado resulta em 2. □

Em particular podemos escrever os racionais como união de dois conjuntos disjuntos

$$\mathbb{Q} = A \cup B$$

onde

$$A := \{p \in \mathbb{Q} : p < 0 \text{ ou } p^2 < 2\}, \quad B := \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \text{ ou } p^2 > 2\}.$$

No que segue vamos mostrar que A não possui elemento maximal (a prova de que B não possui elemento minimal é análoga e é deixada como exercício para o leitor).

Proposition 1.0.2. *O conjunto* A *não possui elemento maximal.*

Prova. Considere $p \in A$ qualquer. Se $p < 1$ então p não é maximal já que $1 \in A$. Suponhamos então que $p \geq 1$. Considere

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2}.$$

Como $p \in A$ temos $p^2 - 2 < 0$ logo $0 < -\frac{p^2-2}{p+2}$ e, somando p em ambos os lados, concluímos que

$$p = 0 + p < p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = q.$$

Assim, q é maior que p. Agora basta mostra que $q \in A$ para concluírmos que p não pode ser elemento maximal de A. De fato,

$$q^2 - 2 = \left(p - \frac{p^2 - 2}{p + 2}\right)^2 - 2 = \left(\frac{2p + 2}{p + 2}\right)^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} < 0.$$

Ou seja, $q^2 < 2$ o que implica $q \in A$. Logo A não possui elemento maximal, como queríamos demonstrar. $\square$

1.1 Cortes de Dedekind

A fim de preencher todos esses espaços vazios deixados pelos racionais, precisamos de alguma forma incluir tais espaços como símbolos de um novo sistema numérico. Para isso utilizaremos o conceito de cortes dos racionais, introduzido pelo matemático Julius Wilhelm Richard Dedekind .

Definition 1.1.1. *Um corte é um par de subconjuntos não vazios (E, D), $E, D \subset \mathbb{Q}$ tais que:*

i) $E \cup D = \mathbb{Q}$,

ii) todo elemento de E é menor do que todo elemento de D, isto é,

$$\forall\, e \in E,\ d \in D \quad e < d.$$

Um corte $\alpha = (E, D)$ é dito **racional** se o elemento que separa E e D for um número racional. Neste caso, podemos utilizar este próprio elemento para denotar o corte.

Agora precisamos definir certas estruturas no espaço de todos os possíveis cortes para tornar este espaço um "sistema numérico" (mais precisamente, um corpo ordenado). A primeira dessas estruturas é a relação de ordem.

Ordem entre os cortes:

Definition 1.1.2. *Dados dois cortes* $\alpha = (E_1, D_1)$ *e* $\beta = (E_2, D_2)$*, diremos que*

$$\alpha = \beta$$

se $E_1 = E_2$*. Diremos que* $\alpha < \beta$ *se* E_1 *é um subconjunto próprio de* E_2*, isto é, se* $E_1 \subset E_2$ *mas* $E_1 \neq E_2$*.*

OBS: Caso α e β sejam cortes racionais, observe que a ordem definida pelo corte coincide com a ordem já satisfeita entre α e β.

Operações entre cortes:

Definida a relação de ordem, precisamos definir como somar e multiplicar os cortes. Para isso usaremos a seguinte notação: dados dois conjuntos A, B, denotaremos

$$A + B := \{a + b : \quad a \in A, b \in B\}.$$

Definition 1.1.3. *Sejam* $\alpha = (E_1, D_1)$ *e* $\beta = (E_2, D_2)$ *dois cortes, definimos:*

$$\alpha + \beta = (E, D), \quad E := E_1 + E_2, \; D = E^c.$$

Se E_1 *e* E_2 *possuirem racionais positivos, definiremos*

$$\alpha \cdot \beta = (E, D),$$

em que E *é o conjunto de todos os elementos* $p \in \mathbb{Q}$ *tais que existem* $a \in E_1, b \in B_2$ *com* $a > 0$ *e* $b > 0$*, satisfazendo*

$$p \leq a \cdot b.$$

Para que essa definição faça sentido precisamos provar que $\alpha + \beta$ definido acima (análogo para $\alpha \cdot \beta$) é, de fato, um corte. Consideremos $x \in E$ e $y \in D$. Suponhamos por absurdo que $y < x$. Logo $x = y + a$ para algum $a \in \mathbb{Q}$ com $a > 0$ e $x \in E$. Como $E = E_1 + E^2$, existem $m \in E_1$ e $n \in E_2$ tais que

$$x = m + n.$$

Logo

$$m + n = y + a \Rightarrow y = (m - a) + n.$$

Como $m \in E_1$ então $m - a \in E_1$, assim $y \in E_1 + E_2$ caindo em contradição. Portanto, $x < y$ como queríamos.

O inverso aditivo de um corte $\alpha = (E, D)$ é dado pelo corte $-\alpha = (F, G)$ definido por:

$$F = \{p \in \mathbb{Q} : \ p \leq -a, \quad \text{para todo } a \in E\}.$$

Para definir a multiplicação entre cortes que eventualmente não estão definidos por números positivos colocamos:

- $\alpha \cdot \beta = 0$, se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$,
- $\alpha \cdot \beta := (-\alpha) \cdot (-\beta)$, se $\alpha, \beta < 0$
- $\alpha \cdot \beta := -((-\alpha) \cdot \beta)$, se $\alpha < 0$, $\beta > 0$,
- $\alpha \cdot \beta := -(\alpha \cdot (-\beta))$, se $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

Definition 1.1.4. *O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é o conjunto $\{\alpha : \quad \alpha = (C, D)$ é um corte$\}$ munido da relação de ordem "$<$" e das operações de soma e multiplicação de cortes definida acima.*

As operações de soma e multiplicação definidas acima satisfazem todas as "boas propriedades" que são esperadas para elas. Mais precisamente o conjunto $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo. Abaixo lembramos a definição de corpo:

Definition 1.1.5. *Um conjunto X munido de duas operações $+ : X \times X \to X$ e $\cdot : X \times X \to X$, chamadas de soma e multiplicação respectivamente, é dito um corpo se satisfaz:,*

1) *[Associativa da soma] $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.*

2) *[Comutativa da soma] $x + y = y + x$, $x, y \in X$.*

3) *[Elemento neutro] Existe um elemento denotado por $0 \in X$, tal que*
$$x + 0 = x, \quad \forall x \in X.$$

4) *[Inverso aditivo] Dado $x \in X$ qualquer, existe um elemento denotado $-x \in X$ tal que*
$$x + (-x) = 0.$$

5) *[Associativa da multiplicação] $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x, y, z \in X$.*

6) *[Comutativa da multiplicação] $x \cdot y = y \cdot x$, $x, y \in X$.*

7) *[Elemento unitário] Existe um elemento denotado por* $1 \in X$, *tal que*

$$x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in X.$$

8) *[Inverso multiplicativo] Dado* $x \in X$, $x \neq 0$, *qualquer, existe um elemento denotado* $x^{-1} \in X$ *ou* $\frac{1}{x}$ *tal que*

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

9) *[Distributiva]* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $x, y, z \in X$.

Se $(X, +, \cdot)$ for um corpo e, além disso, estiver munido com uma relação de ordem $<$, diremos que $(X, +, \cdot, <)$ é um *corpo ordenado* se:

i) se $x < y$ então $x + z < y + z$ para todo $z \in X$.

ii) se $0 < x$ e $0 < y$ então $0 < x \cdot y$.

Também utilizaremos as notações:

- $x > y$ para indicar que $y < x$,
- $x \leq y$ para indicar que $x < y$ ou $x = y$,
- $x \geq y$ para indicar que $x > y$ ou $x = y$.

Para um corpo ordenado $(X, <)$, diremos que um elemento $x \in X$ é:

- **positivo** se $x > 0$.
- **negativo** se $x < 0$.

O teorema a seguir afirma que a construção dos reais apresentada acima realmente define um corpo ordenado.

Theorem 1.1

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado que contém $\mathbb{Q}$.

Finalmente, agora que os racionais e os reais estão bem definidos, definimos o conjunto dos *números irracionais* como sendo o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2 Supremo e ínfimo

O conjunto dos números reais possui propriedades bastante interessantes que não são satisfeitas pelos racionais e que nos ajudam a visualizar sua continuidade. Lembre-se que para os racionais podemos escrever

$$\mathbb{Q} = A \cup B$$
$$A = \{p \in \mathbb{Q} : \ p < 0 \text{ ou } p^2 < 2\}, \quad B = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0, \ p^2 > 2\},$$

e, como provado anteriormente, o conjunto A não possui máximo e o conjunto B não possui mínimo.

Apesar do conjunto A não possuir elemento maximal, ele "não vai para o infinito" no sentido que, por exemplo, nenhum elemento dele ultrapassa 2. Isso gera a descontinuidade que enxergamos nos racionais.

Definition 1.2.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}$, diremos que $c \in \mathbb{R}$ é um limitante superior para E, ou cota superior para E, se c é maior ou igual a todo elemento de E, isto é, se:*

$$x \leq c, \quad \forall\, x \in E.$$

Analogamente, $d \in \mathbb{R}$ é dito limitante inferior para E, ou cota inferior para E, se d é menor ou igual a todo elemento de E, isto é, se:

$$d \leq x, \quad \forall\, x \in E.$$

Se um conjunto A possuir cotas superiores diremos que A é *limitado superiormente*. Analogamente, se A possuir cotas inferiores, diremos que A é limitado inferiormente. Caso A seja limitado superiormente e inferiormente, diremos que A é *limitado*.

Estamos interessados em identificar os "extremos" de um certo conjunto. Para identificar o "extremo superior", é razoável primeiro procurar todas as cotas superiores e depois identificar qual delas é a menor. O elemento resultante será chamado supremo do conjunto em questão, como definiremos a seguir.

Definition 1.2.2. *Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Diremos que um elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ é supremo de E se:*

i) α é cota superior de E,

ii) α é a menor cota superior de E, ou seja, se $\gamma < \alpha$ então γ não é cota superior de E.

Denotaremos o supremo de um conjunto E por $\sup E$.

Analogamente definimos o ínfimo de um conjunto.

Definition 1.2.3. *Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Diremos que um elemento $\beta \in \mathbb{R}$ é ínfimo de E se:*

i) *β é cota inferior de E,*

ii) *β é a maior cota inferior de E, ou seja, se $\beta < \gamma$ então γ não é cota inferior de E.*

É importante observar que, apesar de serem conceitos parecidos, supremo e máximo não são a mesma coisa. O mesmo ocorre com as definições de ínfimo e mínimo. A diferença crucial é que máximo e mínimo de um conjunto são elementos que devem pertencem ao conjunto, ao passo que supremo e ínfimo não precisam pertencer ao conjunto ao qual se referem. Portanto, o supremo e ínfimo podem existir mesmo que não existam o máximo e o mínimo.

Example 1. *Considere os conjuntos $A_1 = \{p \in \mathbb{Q} : 0 \leq p \leq 1\}$, $A_2 = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p \leq 1\}$, $A_3 = \{p \in \mathbb{Q} : 0 \leq p < 1\}$ e $A_4 = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p < 1\}$ todos como subconjuntos de $\mathbb{Q}$.*

1) $\sup A_1 = \max A_1 = 1$ *e* $\inf A_1 = \min A_1 = 0$,

2) $\sup A_2 = \max A_2 = 1$ *e* $\inf A_2 = 0$, *mas o mínimo não existe,*

3) $\sup A_3 = 1$ *e* $\inf A_1 = \min A_1 = 0$, *mas o máximo não existe,*

4) $\sup A_4 = 1$ *e* $\inf A_1 = 0$, *mas o mínimo e máximo não existem.*

Definition 1.2.4. *Diremos que um conjunto ordenado $(X, <)$ possui:*

*1) a **propriedade do menor limitante superior** se todo subconjunto $A \subset X$ não vazio limitado superiormente possui supremo em X.*

*2) a **propriedade do maior limitante inferior** se todo subconjunto $A \subset X$ não vazio limitado inferiormente possui ínfimo em X.*

No que segue mostraremos que o conjunto dos números reais possuem essas propriedades. Antes de prosseguir, vamos mostrar que estas propriedades são equivalentes. Assim bastará provar uma delas para os reais.

Theorem 2.1

Dado um conjunto ordenado $(X, <)$. Se X possuir a propriedade do menor limitante superior, X possuirá também a propriedade do maior limitante inferior.

Demonstração. Suponhamos que X possua a propriedade do menor limitante superior. Considere $A \subset X$ um subconjunto limitado inferiormente. Defina L o conjunto com todas as cotas inferiores de A, isto é,

$$L = \{c \in X : \ c \text{ é cota inferior para } \ A\}.$$

Como A é limitado inferiormente segue que $A \neq \emptyset$. Além disso, como A é não vazio, L é limitado superiormente pois qualquer elemento de A é maior do que todos os elementos de L.

Portanto, L possui supremo. Denotemos $\alpha = \sup L$. Vamos mostrar que α é o ínfimo de A.

Afirmação 1: α é cota inferior de A.
Prova: Suponha que isso não seja verdade, isto é, que exista $a \in A$ com $a < \alpha$. Neste caso, pela definição de supremo de L, a não pode mais ser cota superior de L. Assim, existe $l \in L$ tal que

$$a < l.$$

Mas isso contradiz o fato que l é cota inferior de A. Portanto, de fato, α é cota inferior de A. $\triangle$

Afirmação 2: α é a maior cota inferior de A.
Prova: Suponha que $\alpha < \beta$ e vamos mostrar que β não pode ser mais cota inferior de A. Suponha que seja. Assim, como L é o conjunto das cotas inferiores de A temos $\beta \in L$. Mas como $\alpha = \sup L$, segue que α é cota superior de L, em particular $\beta \leq \alpha$ caindo em contradição. Portanto, α é a maior cota inferior de A. $\triangle$

Em outras palavras, provamos que α é o ínfimo de A como queríamos demonstrar. $\square$

Theorem 2.2

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, possui a propriedade do menor limitante superior e a propriedade do maior limitante inferior.

Demonstração. Considere $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente, digamos

$$x \leq c, \quad \forall x \in X,$$

e um certo $c \in \mathbb{R}$ fixado. Vamos mostrar que X possui supremo.

Cada $x \in X$ corresponde a um corte dos racionais que denotaremos $x = (E_x, D_x)$. Agora, considere o par $y = (E, D)$ em que

$$E = \bigcup_{x \in X} E_x, \quad D = \mathbb{Q} \setminus E.$$

Vamos provar que y é o supremo de X.

Afirmação 1: y é um corte.
Prova: Suponhamos que existam $a \in E$ e $b \in D$ tais que $b \leq a$. Como $a \in E = \bigcup_{x \in X} E_x$, existe algum $x \in X$ de forma que $a \in E_x$. Em particular, como $b \leq a$ segue que $b \in E_x$. Mas isto implicaria $b \in E$ caindo em contradição com o fato que $E \cap D = \emptyset$.

Assim, $y = (E, D)$ é um corte, como queríamos demonstrar.

Afirmação 2: y é uma cota superior para X.
Prova: Tome $x_0 = (E_{x_0}, D_{x_0}) \in X$ qualquer. Como $E = \bigcup_{x \in X} E_x$, segue que $E_{x_0} \subset E$, isto é, $x_0 \leq y$, como queríamos.

Afirmação 3: y é a menor cota superior para X.
Prova: Considere um corte $z = (F, G)$ com $z < y$. Assim, $F \subset E$ e $F \neq E$. Seja $p \in E$ tal que $p \notin F$, então pela definição de corte segue que F não pode conter nenhum racional maior ou igual a p, isto é,

$$F \subset \{x \in \mathbb{Q} : x < p\}.$$

Mas como $p \in E$, existe $x \in X$ tal que $p \in E_x$. Assim, $F \subset E_x$ e $F \neq E_x$. Ou seja,

$$z < x, \quad \text{para um certo } x \in X.$$

Mas isto implica que z não é cota superior de X. Ou seja, provamos que y é a menor cota superior de X como queríamos.

Assim, provamos que $y = \sup X$, provando, portanto, que $\mathbb{R}$ possui a propriedade do menor limitante superior.

□

1.2.1 Consequências da propriedade do menor limitante superior

A propriedade do menor limitante superior, introduzida na seção anterior e demonstrada para o conjunto dos reais, pode parecer bastante abstrata e sem utilidade prática em uma primeira vista. Entretanto, é através dela que conseguimos demonstrar propriedades importantíssimas dos reais como a **propriedade arquimediana** e, consequentemente, a **densidade dos racionais**.

Theorem 2.3

a) (Propriedade arquimediana) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 0$, existe um inteiro positivo n tal que
$$n \cdot x > y.$$

b) (Densidade dos racionais) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existe um racional p tal que
$$x < p < y.$$

Demonstração. a) Consideremos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$ qualquer. Consideremos o conjunto
$$A := \{n \cdot x : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Suponhamos por absurdo que não exista nenhum $n \in \mathbb{N}$ para o qual $n \cdot x > y$, ou seja, suponha que:
$$n \cdot x \leq y, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, y é um limitante superior de A. Pelo Teorema **??** segue que A possui um supremo, digamos $\alpha = \sup A$.

Como $x > 0$, como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, podemos somar $-x$ em ambos os lados dessa desigualdade e obter $-x < 0$. Ainda usando o fato que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado temos:
$$-x < 0 \Rightarrow \alpha - x < \alpha.$$

Como α é o supremo de A, a última inequação implica que $\alpha - x$ não é cota superior de A. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - x < m \cdot x$. Mas:

$$\alpha - x < m \cdot x \Rightarrow \alpha < (m+1) \cdot x.$$

Isto cai em contradição com o fato que α é cota superior de A e, portanto, deveria ser maior ou igual a $(m+1) \cdot x$.

Ou seja, de fato A não pode ser limitado superiormente por y, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x > y$ como queríamos.

b) Dados x, y reais com $x < y$, então $0 < y - x$. Pelo item (a), deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \cdot (y - x) > 2.$$

Assim $n \cdot y > n \cdot x + 2$. Ainda pelo item (a), existem naturais m tais que $m \cdot 1 > n \cdot x$. Considere então k o menor inteiro com esta propriedade , isto é,

$$k := \min\{m \in \mathbb{Z} : \; m \geq n \cdot x\}.$$

Vamos provar que $k+1 < n \cdot y$. Suponha por absurdo que $k+1 \geq n \cdot y$. Então

$$k + 1 \geq n \cdot y > n \cdot x + 2 \Rightarrow k - 1 > n \cdot x,$$

contradizendo o fato que k é o menor inteiro maior ou igual a $n \cdot x$. Logo, de fato, $k + 1 < n \cdot y$. Assim, concluímos que:

$$n \cdot x \leq k < k + 1 < n \cdot y \Rightarrow x < \frac{k+1}{n} < y.$$

Tomando $p = \frac{k+1}{n}$ concluímos que p é racional e que $x < p < y$. $\square$

1.2.2 Valor absoluto e duas desigualdades importantes

A partir de agora vamos trabalhar com os reais como já os conhecemos, isto é, utilizando as propriedades básicas dos reais estudadas no ensino básico como potencias e radiciação. O objetivo principal desta seção é introduzir duas importantes desigualdades válidas para números reais, muito úteis, por exemplo, para estabelecer estimativas ou trabalhar com a propriedade de continuidade que veremos posteriormente.

Primeiramente lembremos o conceito de valor absoluto. Dado um número real x, o valor absoluto de x, denotado por $|x|$ indica a *distância de x até o elemento nulo*, ou seja,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, se } x \geq 0. \\ -x & \text{, se } x \leq 0. \end{cases}$$

Assim, por exemplo, $|5| = 5$ e $|-10| = 10$. Apesar de termos estudado as propriedades da função módulo no ensino médio, é importante demonstrar como exercício as seguintes propriedades.

Proposition 1.2.5. *Para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

i) $|x| = |-x|$.

ii) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$.

iii) $|x|^2 = |x^2| = |-x|^2$.

iv) $x \leq |x|$.

Theorem 2.4: Desigualdade Triangular

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, então:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração. Existem muitas formas de demonstrar este teorema, uma delas é trabalhar com vetores compondo os lados de um triângulo. Aqui usaremos apresentaremos apenas uma demonstração algébrica mais direta.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, observe que

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2.$$

Como $xy \leq |xy| = |x||y|$, da igualdade anterior segue que:

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Assim, como $|x+y|$ e $|x| + |y|$ são positivos, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os lados obtendo:

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

A desigualdade triangular muitas vezes é apresentada em versões equivalentes como as que mostramos abaixo:

Corollary 1.2.6. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, são verdadeiras:*

a)
$$|x-y| \leq |x| + |y|.$$

b)
$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

A demonstração deste corolário é deixada como exercício para o leitor. No que segue veremos alguns exemplos úteis da desigualdade triangular para obter estimativas sem necessariamente precisar resolvermos completamente uma inequação.

Example 2. *Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x+1| < 2$, prove que*
$$|x^2 + 2x + 3| < 6.$$

Solução: Observe que apenas temos informação sobre "$x + 1$", portanto, a fim de utilizar essa informação precisamos escrever a expressão dentro do módulo em função deste termo. No nosso caso observe que:
$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2.$$
Assim, pela desigualdade triangular temos:
$$|x^2 + 2x + 3| = |(x+1)^2 + 2| \leq |x+1|^2 + |2| < 4 + 2 = 6.$$

Example 3. *Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $2 \leq |x| \leq 3$, prove que*
$$4 \leq |x^3 - x + 1|.$$

Solução: Utilizando o item (b) do corolário 1.2.6 temos:
$$|x^3 - x| - |1| \leq ||x^3 - x| - |1|| \leq |x^3 - x + 1|.$$
Agora, utilizando o mesmo resultado no termo $|x^3 - x|$ temos:
$$|x|^3 - |x| - |1| \leq |x^3 - x| - |1| \leq |x^3 - x + 1|.$$
Como $2 \leq |x| \leq 3$ temos $|x|^3 - |x| - |1| \geq 2^3 - 3 - 1 = 4$. Assim,
$$4 \leq |x|^3 - |x| - |1| \leq |x^3 - x + 1|$$
como queríamos demonstrar.

Uma outra desigualdade muito importante relacionada aos números reais é a desigualdade de Cauchy-Schwarz à qual apresentaremos a seguir.

Theorem 2.5: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais. Então:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Demonstração. Considere

$$A := \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B := \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad C := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i.$$

Assim, claramente $A, B \geq 0$ já que são somas de quadrados de números reais. Além disso, $B = 0$ somente se $b_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mas neste caso teríamos $C = 0$ e a igualdade seguiria.

Assim, podemos assumir que estamos no caso $B > 0$. Note que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{n}(Ba_i - Cb_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} B^2 a_i^2 - 2BC \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} C^2 b_i^2 \\ &= B^2 A - 2BC^2 + C^2 B \\ &= B^2 A - BC^2 \qquad = B(BA - C^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$0 \leq B(BA - C^2).$$

Como $B > 0$, devemos ter $C^2 \leq BA$, isto é ,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

como queríamos demonstrar. □

1.3 Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis

Para finalizar o estudo sobre os reais vamos agora analisar este conjunto do ponto de vista da sua "quantidade de elementos".

Definition 1.3.1. *Diremos que um conjunto A é finito se existe um $n \in \mathbb{N}$, e uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$. Neste caso, este n é a quantidade de elementos de A.*

Um conjunto que não é finito é chamado de infinito.

Para conjuntos finitos é fácil comparar as quantidades de elementos que cada conjunto possui. Isto não é trivial quando se trata de conjuntos infinitos. Por exemplo, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ possuem ambos infinitos elementos, mas será que podemos dizer que a "quantidade de elementos de $\mathbb{N}$" é menor do que a "quantidade de elementos de $\mathbb{Z}$" ? Este tipo de pergunta esbarra em uma boa definição de "quantidade de elementos" para conjuntos que não são finitos. Isto é, sob que circunstâncias podemos dizer que dois conjuntos A e B infinitos possuem a mesma "quantidade de elementos" ?

Definition 1.3.2. *Sejam A e B dois conjuntos, diremos que A e B possuem a mesma cardinalidade, e denotaremos isto por $card(A) = card(B)$, se existir uma bijeção $f : A \to B$.*

A definição acima é uma forma bem razoável de comparar conjuntos via quantidade de elementos.

Definition 1.3.3. *1) Um conjunto A é dito enumerável se for infinito e $card(A) = card(\mathbb{N})$.*

2) Um conjunto A é dito não enumerável se for infinito e não for enumerável.

3) Um conjunto A é dito contável se for ou finito ou enumerável.

Exercício: Mostre que qualquer subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ é enumerável.

Theorem 3.1

O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = 2n, \quad \text{se } n > 0$$

$$f(n) = -2n + 1, \quad \text{se } n \leq 0.$$

Exercício: Prove que esta função é bijetora e conclua que $\mathbb{Z}$ é enumerável. □

Theorem 3.2

Sejam $E_1, E_2, E_3, \ldots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis. Então a união:

$$E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

é enumerável.

Demonstração. Como cada um dos E_i é um conjunto enumerável, existe uma função bijetora $f_i : \mathbb{N} \to E_i$, por isso podemos escrever cada E_i da seguinte forma:

$$E_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots\},$$

em que $x_{ij} := f_i(k)$.

Agora, escrevemos os conjuntos E_i em linhas consecutivas, formando uma "matrix infinita" como segue:

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Agora, listamos os elementos de E seguindo as diagonais da esquerda para a direita, isto é:

$$E = \{x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{23}, \ldots\}.$$

Em particular, definimos a bijeção $f : E \to \mathbb{N}$ da seguinte forma: para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos

$$f(x_{(n-j)(j+1)}) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + j + 1 = \frac{n(n-1) + 2j + 2}{2}, \quad 0 \leq j \leq n-1. \tag{1.3.1}$$

Por exemplo, $f(x_{11}) = 1$, $f(x_{32}) = 8$. Esta função é uma bijeção, como será mostrado pelo leitor nos exercícios, de onde segue que E é enumerável como queríamos demonstrar. □

Theorem 3.3

O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Demonstração. Seja $\mathbb{Q} := \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, defina:

$$Q_q := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Considere agora a função $f_q : Q_q \to \mathbb{Z}$ dada por:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = p.$$

Observe que esta função é bijetora, portanto, como $\mathbb{Z}$ é enumerável segue que Q_q é enumerável para todo $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Finalmente, pelo teorema anterior conclui-se que

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}, q \neq 0} Q_q$$

deve ser enumerável, como queríamos demonstrar. $\square$

Ou seja, pelo que fizemos até agora, em termos dos conceitos de cardinalidade tanto $\mathbb{N}$ quanto $\mathbb{Q}$ possuem a mesma grandeza de elementos. Será que o conjunto dos reais também possui essa mesma quantidade de elementos?

Theorem 3.4

O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração. Considere o intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Se provarmos que $(0, 1)$ não é enumerável então $\mathbb{R}$ também não pode ser.

Suponhamos por absurdo que $(0, 1)$ seja enumerável. Então podemos escrever o intervalo $(0, 1)$ como uma sequência de elementos: $(0, 1) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Agora, para cada x_i consideremos a notação decimal de x_i:

$$x_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots.$$

Considere o número real $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ definido por:

$$a_i = 1, \quad \text{se } a_{ii} \neq 1$$

$$a_i = 2, \quad \text{se } a_{ii} = 1.$$

Como o elemento x construido não é nenhum dos x_i's caímos em contradição com o fato que $x \in (0,1)$. Portanto, $\mathbb{R}$ de fato é não-enumerável. $\square$

1.4 Exercícios

Problem 1. *Mostre que qualquer subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$ *é enumerável.*

Problem 2. *Mostre que a função definida em* (1.3.1) *é uma bijeção.*

Capítulo 2

Sequências de números reais

No capítulo anterior trabalhamos bastante com funções bijetoras com domínio nos naturais. Vimos que a imagem de tais funções é um conjunto chamado de enumerável. Neste capítulo trabalharemos com sequências de números reais que não são nada a mais nada a menos do que funções, não necessariamente injetoras, dos naturais nos reais.

Definition 2.0.1. *Uma sequência numérica $a_1, a_2, \ldots$, é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde os números a_i denotam o valor de $f(n)$. Cada a_i é chamado de um termo da sequência.*

Por simplicidade também utilizaremos a notação $(a_n)_n$ ou a notação $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para denotar uma sequência.

Example 4. *1) A sequência de todos os números pares pode ser escrita como:*

$$a_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) A sequência $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ pode ser expressa por:

$$a_n = (-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3) A sequência $(a_n)_n$ onde a_n é o n-ésimo número primo não pode ser escrita através de uma fórmula.

Definition 2.0.2. *Diremos que uma sequência $(a_n)_n$ converge para um valor x, ou que possui limite a, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Quando $(a_n)_n$ possuir limite igual a a escreveremos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ou $a_n \to a$.

Definition 2.0.3. *Uma sequência $(a_n)_n$ é dita divergente se não possuir limite.*

Example 5. *Considere a sequência $(a_n)_n$ definida por $a_n = \frac{n}{n^2+1}$. Podemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ usando a propriedade arquimediana. De fato, dado $\varepsilon > 0$ qualquer tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Então, para qualquer $n \geq N$ temos:*

$$n + \frac{1}{n} > n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{n^2+1}{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon.$$

Ou seja, para $n \geq N$ temos $|a_n - 0| < \varepsilon$, logo $a_n \to 0$ como queríamos provar.

Quanto mais complicada a sequência, mais difícil é encontrar o seu limite utilizando a definição, por isso é conveniente desenvolvermos algumas propriedades gerais de limites que nos ajudem a reduzir casos complicados a limites mais simples. Faremos isto no início da seção seguinte.

2.1 Operações com limites

Definition 2.1.1. *Uma sequência $(a_n)_n$ é dita limitada se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|a_n| \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por exemplo a sequência $a_n = n^2$ não é limitada pois n^2 assume valores arbitrariamente grandes conforme aumentamos n, mas a sequência $b_n = (-1)^n$ é limitada pois $|b_n| \leq 2$ para todo n.

Theorem 1.1

Seja $(a_n)_n$ uma sequência de números reais com $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Então (a_n) é limitada.

Demonstração. Considere $\varepsilon = 1$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, utilizando a definição de limite existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ temos

$$|a_n - a| < 1.$$

Assim,

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < 1 + |a|, \quad \forall n \geq N.$$

Considere

$$M = \max\{|a_1| + 1,\ |a_2| + 1,\ \dots, |a_{N-1}| + 1,\ 1 + |a|\}.$$

Então $|a_k| < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(a_n)_n$ é limitada como queríamos demonstrar. $\square$

Theorem 1.2

Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes, com limites a e b respectivamente. Então:

i) $(a_n + b_n)$ é convergente e $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

ii) $(a_n \cdot b_n)$ é convergente e $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

iii) $k \cdot a_n$ é convergente, para todo $k \in \mathbb{R}$, e $\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot a$.

iv) se $b \neq 0$, então a_n/b_n é convergente e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Demonstração. Provaremos (ii) e (iv) e deixaremos os outros itens como exercício. (ii) Como $(b_n)_n$ é convsergente, pelo teorema anterior ela é limitada. Assim, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo n. Agora, observe que pela desigualdade triangular temos:

$$|a_nb_n - ab| = |(a_n - a)b + a(b_b - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|. \tag{2.1.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $a_n \to a$ e $b_n \to b$, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que se $n \geq N$ então

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}.$$

Assim, por (2.1.1) segue que:

$$|a_nb_n - ab| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon,$$

concluindo a demonstração de (ii).

(iv) Para demonstrar (iv) observe primeiro que $\frac{a_n}{b_n}$ é o mesmo que a multiplicação das sequências a_n e $1/b_n$. Já sabemos que a_n converge para a, então pelo item (ii) basta provar que $1/b_n$ converge para $1/b$, isto é o que faremos agora. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n \cdot b}\right|.$$

Como $b_n \to b$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então:

$$|b_n| > |b|/2 \quad \text{e} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2.$$

Assim, para $n \geq N$ temos

$$\left|\frac{b_n - b}{b_n \cdot b}\right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|b|^2}{|b|^2/2} = \varepsilon,$$

concluindo o que queríamos demonstrar. □

O teorema anterior é extremamente útil mas, claro, para usá-lo precisamos já previamente conhecer alguns limites de sequências "básicos". No que segue encontraremos dois limites bastante úteis na teoria.

Theorem 1.3

Dado $a > 0$,

$$\sqrt[n]{a} \to 1$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração. □

Theorem 1.4

A sequência $a_n = \sqrt[n]{n}$ converge para 1 quando $n \to \infty$.

Demonstração. □

2.2 Sequências Monótonas

Definition 2.2.1. *Seq monotonas*

Theorem 2.1

Se $(a_n)_n$ é uma sequência monótona e limitada, então $(a_n)_n$ é convergente.

Demonstração. □

Example 6. *Vamos mostrar que a sequência* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *é convergente provando que ela é crescente (em particular monótona) e limitada. O limite desta sequência será o nosso conhecido número de Euler* e.