Introdução à Análise - MA507
Lista de Revisão

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@unicamp.br

Antes de iniciarmos esta disciplina é importantíssimo termos em mente o seu objetivo principal e quais os pré-requisitos necessários para cursá-la.

- **Objetivo:** Praticar demonstrações, elaboração e enunciados de teoremas (incluindo lemas, proposições etc) matemáticos de forma rigorosa, focando em um dos assuntos mais importantes no desenvolvimento da matemática moderna, a saber: os conceitos desenvolvidos no cálculo diferencial.

- **Pré requisitos:** Elementos de matemática (o que é uma demonstração, princípio de indução, simbologia matemática, prova por absurdo etc), limites, derivadas e integrais.

Outro ponto importante de ser ressaltado, o qual é muitas vezes ignorado, é que a matemática não consiste em um conjunto de regrinhas a serem seguidas mas sim em uma série de conceitos e definições os quais se relacionam logicamente gerando consequências úteis. Nesse sentido é de extrema importância observar que o/a professor/ra de matemática deve **saber definir formalmente os objetos matemáticos que utiliza e não apenas como operar com eles**. Por isso, nos exercícios a seguir se certifique de que você entende o que está fazendo, tente explicar em detalhes a sua solução para alguém como se fosse uma aula.

1 Operações usuais com números reais

1. (Operações com frações) Em cada caso calcule:

1) $\frac{3}{4} + \frac{7}{10}$

2) $\frac{2}{17} \cdot \frac{3}{2}$

3) $\frac{a \cdot b + c}{b} - \frac{a+c}{b}$ (podemos "cortar o b" ?)

4) $\frac{\frac{2}{3}}{5}$

5) $\frac{2}{\frac{3}{5}}$

6) $\frac{\frac{1}{7}+\frac{2}{5}}{3}$

7) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{7}{5}+\frac{3}{6}}$

2. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(ad + bc)}{bd}$$

e

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

3. Prove que

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + ... + x^n$$

para todo $x \neq 1$.

4. Mostre que se $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ e $x \notin \mathbb{Q}$ então $r + x \notin \mathbb{Q}$ e $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.

5. Prove que $(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2$ para todo real $x \geq 0$.

6. Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$.

7. Em cada caso resolva a equação ou inequação (sempre $x, y \in \mathbb{R}$):

1) $x^2 > 100$.

2) $-x > 4$.

3) $|x - 1| = 2$.

4) $|x - 1| < 2$.

5) $x^2 + y^2 = 0$.

6) $|x - 2| + |5 - x| = 3$.

7) $|x^2 - 1| + |2 - x| = 0$.

8) $||x| - 3| = 4$.

8. Prove que $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$.

9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que, para todo $\varepsilon > 0$, tenhamos

$$|a - b| < \varepsilon.$$

Prove que $a = b$.

10. Prove que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

2 Notação, símbolos e escrita matemática

11. Em cada caso, verifique se ambos os termos são iguais ou diferentes e efetue a subtração de ambos.

a) $2 \cdot 7 + 5$ e $2 \cdot (7 + 5)$

b) $\pi \cdot (e^2 + e^3)$ e $\pi \cdot e^2 + e^3$

c) $z \cdot z + 7$ e $z \cdot (z + 7)$

d) $i \cdot \theta + 2\pi$ e $i \cdot (\theta + 2\pi)$

12. Muitas vezes o símbolo matemático de implicação "$\Rightarrow$" é usado de forma errônea como se fosse um símbolo de igualdade "$=$". O símbolo de igualdade denota objetos/expressões literalmente iguais, enquanto o símbolo de implicação é utilizado para indicar quando uma determinada verdade ou propriedade implica outra. Por exemplo:

- Pode-se escrever $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$ mas não é correto escrever $x + 1 = 3 = x = 2$;

- pode-se escrever $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ mas não é correto escrever $x^2 + 2x + 1 \Rightarrow (x + 1)^2$, uma vez que as expressões soltas "$x^2 + 2x + 1$" e "$(x + 1)^2$" não são verdades ou propriedades em si.

Em cada um dos casos a seguir, reescreva de forma correta a solução do exercício dado. Lembre-se que uma solução matemática também é uma redação e, portanto, deve estar coesa e coerente. Leia sua demonstração em voz alta da forma como está escrita e, caso necessário, acrescente elementos para torna-la mais compreensível. Lembre-se que expressões simples - “logo”, “portanto”, “então”, “assim”, “concluímos que“, ”Sabendo que”, “Queremos demonstrar que...” , etc - já auxiliam muito na compreensão e bom encadeamento lógico da solução.

a) Ex: Cálcule todos os valores de x para os quais $\frac{x^4-4x^2+4}{(x-\sqrt{2})^2} = 5$.
Solução:

$$\frac{x^4-4x^2+4}{(x-\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{(x^2-2)^2}{(x-\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2}{(x-\sqrt{2})^2} \Rightarrow (x+\sqrt{2})^2 = 5 \Rightarrow \pm\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

b) Ex: Simplifique a fração $\frac{2\cdot 7+3}{21}$.
Solução:

$$\frac{2\cdot 7+3}{21} \Rightarrow \frac{14+3}{21} \Rightarrow \frac{15}{21} \Rightarrow /3 \Rightarrow \frac{5}{7}.$$

c) Ex: Calcule todo os valores de x para os quais $x^2-1=x$.
Solução: Sabemos que

$$x^2-1=x \Rightarrow x^2-x-1=0.$$

Assim,

$$x^2-x-1=0.$$
$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
$$\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$$
$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

d) Ex: Calcule todo os valores de x para os quais $\frac{x^2-1}{x+1} = -x$.
Solução:

$$\frac{x^2-1}{x+1}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$$
$$x+1$$
$$\frac{-1}{2}.$$

e) Outro erro bastante comum é "sumir" com a notação de limite e reduzir o a função "dentro do limite". Por exemplo, corrija a solução abaixo.
Ex: Calcule $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$.
Solução:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x+1 = -1+1 = 0.$$

f) Ex: Calcule $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$.
Solução:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} \Rightarrow \lim_{x\to -1} x+1 \Rightarrow -1+1 \Rightarrow 0.$$

3 Operações com conjuntos

Nesta seção praticaremos alguns pré-requisitos sobre conjuntos.
13. Sejam $A = \{1, 2, 3, 7, 15, 0\}$ e $B = \{0, 1, 3, 5, 17\}$ escreva os seguintes conjuntos:

i) $A \cup B$

ii) $A \cap B$

iii) $A \setminus B$

iv) $B \setminus A$

v) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Quando necessitamos provar uma igualdade entre conjuntos é geralmente difícil saber "por onde começar". Isso porque igualdades entre conjuntos não são o mesmo que equações entre números reais onde podemos: "passar um termo para o outro lado com sinal trocado", "passar um termo dividindo" ou mesmo "cancelar termos iguais dos dois lados".

Para provar igualdades entre conjuntos é conveniente lembrar que **dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, todos os elementos de A estão em B e vice-versa**. Assim, se queremos provar que $A = B$, basta:

i) tomar $x \in A$ qualquer e provar que $x \in B$,

ii) tomar $x \in B$ qualquer e provar que $x \in A$.

Exemplo: Sejam $A, B \subset \mathbb{N}$ dois conjuntos de números naturais, prove que

$$A \cap B^c = A \setminus B,$$

onde B^c denota o complementar de B em $\mathbb{N}$.
Solução: Vamos fazer essa demonstração seguindo os itens (i) e (ii) acima.

i) Tome $x \in A \cap B^c$ qualquer. Assim, pela definição de interseção temos $x \in A$ e $x \in B^c$. Agora, pela definição de complementar, como $x \in B^c$ então $x \notin B$. Portanto, concluímos que $x \in A$ e $x \notin B$, isto é, $x \in A \setminus B$.

ii) Agora, tome $x \in A \setminus B$ qualquer. Por definição $x \in A$ e $x \notin B$. Mas como $x \notin B$ então $x \in B^c$. Assim, $x \in A$ e $x \in B^c$ o que implica $x \in A \cap B^c$.

Portanto concluímos que $A \cap B^c = A \setminus B$ como queríamos demonstrar. $\square$

14 Sejam $A, B \subset X$, mostre que

i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

iii) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$, mostre que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

iv) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$, mostre que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c.$$

4 Senos e cossenos

13. Calcule os valores abaixo onde os ângulos estão dados em radianos. Relembre os senos e cossenos fundamentais e também as expressões com somas de arcos.

a) $\text{sen}(\pi), \cos(\pi)$.

b) $\text{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2)$.

c) $\text{sen}(3\pi/2), \cos(3\pi/2)$.

d) $\text{sen}(2\pi), \cos(2\pi)$.

e) $\text{sen}(3\pi/4), \cos(3\pi/4)$.

f) $\text{sen}(\pi/6), \cos(5\pi/12)$.

5 Limites

As questões abaixo servirão para relembrar alguns limites do cálculo 1. Um dos limites mais importantes é o limite fundamental, dado por

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

14.

a) Calcule $\lim_{x\to 0} x^5 + 7x^4 + 3x^2 + 1$.

b) Calcule $\lim_{x\to 0} \text{sen}(x^5 + 7x^4 + 3x^2 + \pi/2)$.

c) Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{7x^4+3x^2+1}{x^3-2}$.

d) Mostre que não existe $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

e) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.

f) Calcule $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(2x)+\text{sen}\, 3x}{x}$.

g) Utilize L'Hospital para determinar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$$

onde n é um natural positivo fixado.

h) Utilize L'Hospital para determinar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^n}$$

onde n é um natural positivo fixado.

15. Calcule

a) $\lim_{x\to 0} x^3 \cdot \cos\left(x^2 + \frac{1}{x^3} + 3x\right)$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(x^2 + \frac{1}{x^3} + 3x\right)$.

6 Regras de derivação

16. Relembre as regras de derivação de funções escrevendo em cada caso como calcularíamos a derivada indicada:

a) $(f+g)'(x) =$.

b) $(f-g)'(x) =$.

c) $(f\cdot g)'(x) =$.

d) $(\frac{f}{g})'(x) =$.

e) $(f\circ g)'(x) =$.

f) $(f^2)'(x) =$.

g) $(f\circ f)'(x) =$.

17. Utilize as regras de derivação anterior para calcular a derivada de:

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

c) $f(x) = (x^3+1)(x^{70} + 2x^{68})$.

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 2x)$.

e) $f(x) = \cos(e^x + x^2)$.

f) $f(x) = e^{\cos(x)}$.

g) $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x^2+2x)}$.

h) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

7 Integrais elementares

18. Calcule:

a) $\int_0^1 c\, dx$ onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real.

b) $\int_0^3 x\, dx$.

c) $\int_1^4 x^2\, dx$.

d) $\int_1^2 x^n\, dx$, $n \geq 1$.

e) $\int_0^1 ax^n + bx^m + c\, dx$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n, m \geq 1$.

f) $\int_0^1 \operatorname{sen} x\, dx$.

g) $\int_0^1 (1+2x)^3\, dx$.

h) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx$.

i) $\int_1^9 e^x\, dx$.

j) $\int_0^3 x \cdot (e^x + 1)\, dx$.