Matemática IV - MA044 - Prof. Gabriel Ponce
Primeira Atividade

RAs :

1.a	1.b	1.c	2.a	2.b	2.c	Total

Instruções:

- Os grupos deverão ser formados por exatamente 4 integrantes e todos deverão estar presentes, casos excepcionais devem ser consultados com o professor.
- Coloque o RA (**APENAS**) de todos os integrantes em TODAS as folhas;
- **Justifique bem as soluções. Lembre-se: Parte da nota atribuida à solução será para a escrita**;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da atividade.

Questão 1: Seja C o círculo de centro em $z_0 = 1 - i$ e raio $R = 5$.

a) (2.0) Dê a expressão de C utilizando:
   - módulo da diferença de números complexos.
   - a forma exponencial.

b) (1.0) Dado qualquer $z \in \mathbb{C}$, mostre que

$$z^2 - z(2-2i) + i = (z - z_0)^2 + 3i.$$

c) (2.0) Prove que se $z \in C$ então

$$|z^2 - z(2-2i) + i| \geq 22.$$

Questão 2:

a) (1.0) Defina o que significa a notação $e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

b) (2.0) Sejam

$$w_1 = 1 + i \quad \text{e} \quad w_2 = \sqrt{3} - i$$

determine a forma exponencial de w_1 e de w_2.

c) (2.0) Calcule $w_1^4 \cdot w_2^6$.

Boa atividade!

Gabarito

Questão 1.
Solução: a) Como vimos em sala, as expressões do círculo de centro z_0 e raio R na forma retângular e na forma exponencial respectivamente são:

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{R} : z = z_0 + R \cdot e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, no nosso caso as expressões são:

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = 5\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{R} : z = 1 - i + 5 \cdot e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

b) Vamos expandir o lado direito e chegar ao lado esquerdo. De fato,

$$\begin{aligned}(z - z_0)^2 + 3i = (z - (1 - i))^2 + 3i &= z^2 - 2z(1 - i) + (1 - i)^2 + 3i \\ &= z^2 - z(2 - 2i) + 1 - 2i + i^2 + 3i = z^2 - z(2 - 2i) + i,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

c) Pelo item (b) temos:

$$|z^2 - z(2 - 2i) + i| = |(z - z_0)^2 + 3i|.$$

Utilizaremos agora desigualdade triângular demonstrada em sala que afirma que

$$|u - v| \geq ||u| - |v||, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{C}.$$

Substituindo u por $(z - z_0)^2$ e v por $3i$ nesta desigualdade temos:

$$|(z - z_0)^2 + 3i| \geq ||z - z_0|^2 - |3i|| = |5^2 - 3| = 22,$$

como queríamos.

Questão 2.
Solução:
a) Dado $\theta \in \mathbb{R}$ definimos a notação $e^i \cdot \theta$ por:

$$e^{i \cdot \theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

b) Primeiramente vamos calcular os módulos:

- $|w_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

- $|w_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$

Assim, temos:

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \right) = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

e

$$w_2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \right) = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}.$$

c) Utilizando o item (b) e as propriedades de multiplicação da forma exponencial temos:

$$w_1^4 \cdot w_2^6 = (\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}})^4 \cdot (2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}})^6 = [\sqrt{2}^4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4}] \cdot [2^6 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 6}] = 4 \cdot e^{i\pi} \cdot 2^6 \cdot e^{-i\pi} = 2^8 \cdot e^{i} \cdot 0.$$

Como $e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \cdot \text{sen} 0 = 1$ concluímos que

$$w_1^4 \cdot w_2^6 = 2^8 = 256.$$