

Matemática IV - MA 044

Segunda Lista

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Defina

- ε -vizinhança de um ponto;
- Ponto interior de um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$;
- Conjunto aberto;
- Ponto de fronteiro;
- Fecho de um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$;
- Pontos de acumulação de um conjunto S .

2. Mostre que um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e somente se, todo ponto em S é ponto interior de S .

3. Mostre que um conjunto finito de pontos z_1, z_2, \dots, z_n não pode ter nenhum ponto de acumulação.

4. Determine os pontos de acumulação dos seguintes conjuntos:

1. $z_n = i^n, n = 1, 2, \dots$;
2. $0 \leq \text{Arg } z < \pi/2, z \neq 0$.

5. Escreva a função $f(z) = z^3 + z + 1$ na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

6. Escreva a função

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

na forma $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

7. Mostre que

a) $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0)$;

b) $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$;

c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$.

8. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i.$$

9. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}.$$

Observação: Deixe bem claro quais resultados são utilizados para calcular este limite.

10. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^2.$$

11. Seja $\Delta z := z - z_0$. Mostre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

12. Mostre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0 \text{ se } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$$

e se existe um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0 .

13. Calcule

a) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$;

b) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3}$;

c) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-1}$.