Topologia Geral - MA/MM 453 - Terceira Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

RA:

1	2	3	4	5	6	Total

Instruções:

- ATENÇÃO: Faça 4 questões sendo DUAS DA PARTE A e DUAS DA PARTE B;
- Coloque o seu RA em **TODAS** as folhas;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Esta avaliação é individual e não é permitido o uso de qualquer tipo de material de consulta. Tentativas, bem sucedidas ou não, de cola implicarão na reprovação do(a) aluno(a), segundo explicitado no plano da disciplina;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu.

Questões escolhidas:

Problemas parte A

Problema 1: (2.5) Seja X um espaço topológico e sejam $E \subset X$ e $x \in X$. Mostre que $x \in \overline{E}$ se, e somente se, existe um filtro $\mathcal{F}$ em X tal que $E \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \to x$.

Problema 2: (2.5) Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff. Durante a demonstração enuncie em detalhes os teoremas auxiliares utilizados.

Problema 3: (2.5) Seja X um espaço completamente regular. Mostre que existe uma compactificação Y de X com a propriedade que toda função contínua limitada $f : X \to \mathbb{R}$ se estende unicamente a uma aplicação contínua de Y a $\mathbb{R}$.

Problemas parte B

Problema 4:

a) (0.5) Sejam $f, g : A \to X$ duas funções contínuas entre dois espaços topológicos A e X, defina o que significa dizer que f e g são funções homotópicas.

b) (2.0) Mostre que se X é um espaço topológico conexo por caminhos então quaisquer duas funções contínuas quaisquer $f : [0,1] \to X$, $g : [0,1] \to X$ são homotópicas.

Problema 5:

a) (2.0) Demonstre que $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$, para qualquer $x_0 \in S^1$, enunciando com detalhes todos os Lemas auxiliares utilizados na demonstração.

b) (0.5) Seja $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, calcule $\pi_1(D_2, (0,0))$ e $\pi_1(\mathbb{T}^n \times D_2)$.

Problema 6: Tome G um grupo topológico, ou seja, $(G, \cdot)$ é um grupo munido de uma topologia na qual as funções:

$$(x, y) \mapsto x \cdot y,$$

$$x \mapsto x^{-1},$$

são contínuas. Seja x_0 o elemento identidade de G denote por $\Omega(G, x_0)$ o conjunto dos laços de G em x_0. Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$ definimos o laço $f \otimes g \in \Omega(G, x_0)$ por

$$f \otimes g(s) := f(s) \cdot g(s).$$

a) (0.5) Mostre que $(\Omega(G, x_0), \otimes)$ é um grupo.

b) (0.5) Mostre que $\otimes$ induz uma operação em $\pi_1(G, x_0)$, ou seja, mostre que se $[f_1] = [f_2]$ e $[g_1] = [g_2]$ em $\pi_1(G, x_0)$ então

$$[f_1 \otimes g_1] = [f_2 \otimes g_2].$$

c) (0.5) Utilizando a alternativa (b) definimos $[f] \otimes [g] := [f \otimes g]$. Mostre que

$$[f] \star [g] = [f] \otimes [g].$$

Dica: Calcule $(f \star e_{x_0}) \otimes (e_{x_0} \star g)$.

d) (1.0) Prove que $\pi_1(G, x_0)$ é abeliano.

Foi um prazer dar aulas para vocês neste semestre! Boa prova!!
Au revoir =)