Topologia Geral - MA/MM 453
Lista 6

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Redes e Filtros

1. Faça os problemas $13.A - 13.F$, $15.A - 15.F$ da apostila do Mujica.

2. Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff, enunciando em detalhes todos os resultados auxiliares utilizados na demonstração.

2 Grupo fundamental

3. Mostre que se $h, h' : X \to Y$ são homotópicas e $k, k' : Y \to Z$ são homotópicas então $k \circ h$ e $k' \circ h'$ são também homotópicas.

4. Sejam X e Y espaços dados; seja $[X, Y]$ o conjunto de todas as classes de homotopias de funções de X em Y.

a) Seja $I = [0, 1]$. Mostre que para qualquer X, o conjunto $[X, I]$ possui um único elemento

b) Mostre que se Y é conexo por caminhos, o conjunto $[I, Y]$ possui um único elemento.

5. Sejam x_0 e x_1 dois pontos em um espaço conexo por caminhos X. Mostre que $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano se, e somente se, para todo par α e β de caminhos de x_0 a x_1, temos $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

24. Um espaço X é dito contrátil se a aplicação identidade $i_X : X \to X$ é homotópica a uma constante.

a) Mostre que os espaços I e $\mathbb{R}$ são contráteis.

b) Mostre que um espaço contrátil é conexo por caminhos.

c) Mostre que se Y é contrátil, então para qualquer X, o conjunto $[X, Y]$ tem um único elemento.

d) Mostre que se X é contrátil e Y é conexo por caminhos, então $[X, Y]$ tem um único elemento.

6. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito estrelado se existe $a_0 \in A$ de forma que, dado qualquer $x \in A$ o segmento de reta que liga a_0 a x está inteiramente contido em A.

a) Encontre um conjunto estrelado que não é convexo.

b) Mostre que se A é estrelado, A é simplesmente conexo.

7. Considere X um espaço topológico. Seja α um caminho em X de x_0 a x_1 e β um caminho em X de x_1 a x_2. Mostre que se $\gamma = \alpha \star \beta$ então $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$.

8. Seja $A \subset X$; suponha que $r : X \to A$ é uma função contínua tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. (Este tipo de aplicação r é chamada de **retração** de X sobre A.) Se $a_0 \in A$, mostre que

$$r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$$

é sobrejetora.

9. Seja A um subespaço de $\mathbb{R}^n$; seja $h : (A, a_0) \to (Y, y_0)$. Mostre que se h pode ser estendida a uma função contínua de $\mathbb{R}^n$ em Y, então h_* é o homomorfismo trivial (ou seja, é o homomorfismo que leva todo elemento no elemento neutro do grupo).

10. Mostre que se X é conexo por caminhos, o homomorfismo induzido por uma função contínua é sempre independente do ponto base módulo tomar isomorfismos dos grupos envolvidos. Mais precisamente, seja $h : X \to Y$ uma função contínua, com $h(x_0) = y_0$ e $h(x_1) = y_1$. Seja α um caminho em X de x_0 a x_1, e seja $\beta = h \circ \alpha$. Mostre que

$$\hat{\beta} \circ (h_{x_0})_* = (h_{x_1})_* \circ \hat{\alpha}.$$

11. Seja G um grupo topológico com operação $\cdot$ e elemento identidade x_0. Seja $\Omega(G, x_0)$ o conjunto de todos os laços em G com ponto base x_0. Se $f, g \in \Omega(G, x_0)$, defina o laço $f \otimes g$ por:

$$(f \otimes g)(s) = f(s) \cdot g(s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

a) Mostre que com esta operação $\Omega(G, x_0)$ se torna um grupo.

b) Mostre que esta operação induz uma operação de grupo, que também denotaremos por $\otimes$, em $\pi_1(G, x_0)$.

c) Mostre que as duas operações $\star$ e $\otimes$ em $\pi_1(G, x_0)$ são iguais.

d) Mostre que $\pi_1(G, x_0)$ é abeliano.

3 Espaços de recobrimento

12. Seja Y com a topologia discreta. Mostre que a projeção na primeira coordenada $p : X \times Y \to X$ é uma aplicação de recobrimento.

13. Seja $p : E \to B$ contínua e sobrejetora. Suponha que U é um aberto de B que é uniformemente recoberto por p. Mostre que se U é conexo, então a partição de $p^{-1}(U)$ em fatias é única.

14. Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento; seja B conexo. Mostre que se $p^{-1}(b_0)$ tem k elementos para algum $b_0 \in B$ então $p^{-1}(b)$ possui exatamente k elementos, para todo $b \in B$.

15. Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento, mostre que se B é Hausdorff, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, ou localmente compacto Hausdorff então E também o é.

16. Prove que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ enunciando com detalhes todos os resultados utilizados na demonstração.

17. Prove que $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

18. Determine

1) $\pi_1(\mathbb{T}^2)$.

2) $\pi_1(\mathbb{T}^n)$ onde $\mathbb{T}^n := S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$, n vezes.

3) $\pi_1(P^2)$, onde P^2 denota o plano projetivo.

4) $\pi_1(\mathbb{T}^n \times P^2)$.

5) o grupo fundamental dos **toros sólidos** dados por $(S^1 \times B^2)$ e $S^1 \times S^2$.

19. Prove que se X e Y são homeomorfos e X é conexo por caminhos então

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y).$$

Na questão 18 indique quais espaços são, diretamente, não homeomorfos entre si.