Matemática IV 2019- Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	6	Total

Instruções:

- **Horário de início: 8:00h   Horário de encerramento: 9:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos ou for identificada qualquer forma de cola ou fraude a avaliação será anulada;
- Indique quais questões você escolheu circulando o número da questão na tabela acima;
- Coloque **APENAS** o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Dentre os quatro problemas escolhidos, um deles DEVE OBRIGATORIAMENTE ser o PROBLEMA 5 ou o PROBLEMA 6. Caso forem feitos apenas os problemas 1,2,3 e 4, apenas os três primeiros serão corrigidos.

Matemática IV 2018- Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

Faça 4 problemas sendo que pelo menos um deles deve ser o problema 5 ou o problema 6.

Problema 1: (2.5) Seja

$$f(z) = (e^{-x}\cos y - e^{x}\operatorname{sen} y) + i(e^{x}\cos y - e^{-x}\operatorname{sen} y), \quad z = x + iy,$$

calcule o valor da integral:

$$\int_C f(z)dz$$

onde C é a curva dada na figura 1:

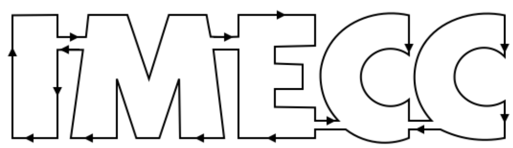

Figura 1: Curva C, também conhecida como #IMECC.

Solução 1: Vamos provar que f é uma função inteira. Observe que podemos reagrupar os termos de f da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(z) &= (e^{-x}\cos y - i\cdot e^{-x}\operatorname{sen} y) + i(e^{x}\cos y + i\cdot e^{x}\operatorname{sen} y) \\ &= e^{-x}(\cos y - i\cdot\operatorname{sen} y) + i\cdot e^{x}(\cos y + i\cdot\operatorname{sen} y) \\ &= e^{-x}\cdot e^{-iy} + i\cdot e^{x}\cdot e^{iy} \\ &= e^{-(x+iy)} + ie^{x+iy} \\ &= e^{-z} + ie^{z}. \end{aligned}$$

Ou seja

$$f(z) = e^{-z} + ie^{z},$$

que é inteira já que $z \mapsto e^{-z}$ e $z \mapsto e^{z}$ são funções inteiras. Em particular, $f(z)$ é analítica sobre a curva fechada simples dada e em seu interior. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat segue que

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Solução 2: Provaremos que f é uma função inteira utilizando as equações de Cauchy-Riemann. Sejam

$$u(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{x}\operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^{x}\cos y - e^{-x}\operatorname{sen} y,$$

temos

$$u_x = -e^{-x}\cos y - e^{x}\operatorname{sen} y, \quad u_y = -e^{-x}\operatorname{sen} y - e^{x}\cos y;$$
$$v_x = e^{x}\cos y + e^{-x}\operatorname{sen} y, \quad v_y = -e^{x}\operatorname{sen} y - e^{-x}\cos y.$$

Como todos os termos envolvidos nas derivadas parciais ($e^{-x}, e^{x}, \operatorname{sen} y$ e $\cos y$) são funções contínuas e definidas em todo o $\mathbb{R}$, segue que tais derivadas parciais existem em todo o $\mathbb{C}$ e são contínuas. Além disso, observe que

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

ou seja, as equações de Cauchy-Riemann também estão satisfeitas em todos os pontos de $\mathbb{C}$. Concluímos por um Teorema visto em sala que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{C}$, ou seja, f é uma função inteira. Em particular, $f(z)$ é analítica sobre a curva fechada simples dada e em seu interior. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat segue que

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Problema 2:

a) (1.0) Defina os três tipos de singularidades isoladas (essencial, removível e polo de ordem m).

b) (1.5) Classifique todas as singularidades da função (ou seja, para cada singularidade determine em qual dos três tipos ela se encaixa):

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2} + e^{\frac{1}{1-z}}.$$

Solução:

a) Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função complexa f, então existe $R > 0$ de forma que f é analítica no anel:

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Neste anel f possui expansão em série de Laurent, digamos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Dizemos que z_0 é :

1) uma singularidade *essencial* se existem infinitos b_n's não nulos, ou seja, se dado $N \in \mathbb{N}$ qualquer, existir $n \geq N$ com $b_n \neq 0$.

2) uma singularidade *removível* se todos os b_n's forem nulos, ou seja, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

3) um *polo de ordem* m se

$$b_m \neq 0 \quad \text{e} \quad b_j = 0, \ \forall j > m.$$

b) Observe que a função $f(z)$ dada possui duas singularidades $z_0 = -i$ e $z_1 = 1$.

Vamos analisar primeiro a singularidade $z_0 = -i$. Observe que a função $e^{1/(1-z)}$ é analítica em $z = -i$ e, portanto, possui série de Taylor ao redor deste ponto, digamos

$$e^{1/(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + i)^n,$$

ou seja, tal função não contribui com termos de potência negativa. A função $1/(1 + z)^2$ já está expandida em série de Laurent ao redor de z_0 e possui apenas um termo e tal termo possui ordem 2, logo a série de Laurent de $f(z)$ ao redor de z_0 é dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + i)^n + \frac{1}{(z + i)^2}$$

e possui apenas um termo (de ordem 2) em sua parte principal o que significa que $z_0 = -i$ é **um polo de ordem** 2.

Agora consideremos a singularidade $z_1 = 1$. Com um raciocínio similar observe que $1/(1 + z)^2$ é analítica em $z_1 = 1$ admitindo, portanto, série de Taylor neste ponto, digamos

$$\frac{1}{(1 + z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - 1)^n.$$

Além disso já sabemos que

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}.$$

Logo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n},$$

o que implica que a expansão de $f(z)$ possui infinitos termos não nulos na parte principal. Assim concluímos que $z_1 = 1$ é uma **singularidade essencial**.

Problema 3: Determine a expansão em série de potências de

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$$

na região:

a) (1.5) $|z| < 1$.

b) (1.0) $1 < |z| < 2$.

solução: Primeiramente vamos utilizar frações parciais para escrever $f(z)$ de uma forma mais adequada para trabalharmos. Queremos encontrar A, B de forma que:

$$\frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1}.$$

Ou seja, queremos $(A+B)z + (2B - A) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C} - \{-2, 1\}$. Para isto devemos ter $A + B = 0$ e $2B - A = 1$. Resolvendo este sistema obtemos $A = -1/3, B = 1/3$, ou seja,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = -\frac{1}{3(z+2)} + \frac{1}{3(z-1)}.$$

Na solução de ambas alternativas utilizaremos o fato que

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1. \tag{0.1}$$

a) Na região $|z| < 1$ temos por (0.1)

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Além disso como $|z| < 1$ também temos $|z/2| < 1$. Logo, substituindo $w = z/2$ em (0.1) temos:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{2^{n+1}}. \tag{0.2}$$

Assim, substituindo na expressão da função temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1}} - \frac{1}{3} \right) \cdot z^n. \end{aligned}$$

b) Na região $1 < |z| < 2$ observe que ainda temos $|z/2| < |2/2| = 1$, portanto a expressão (0.2) continua válida. Precisamos apenas encontrar a expansão de $1/(z-1)$. Como $1 < |z|$ temos $|1/z| < 1$, logo substituindo $w = 1/z$ em (0.1) temos

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Assim, substituindo na expressão da função temos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{3 \cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot z^n}.$$

Problema 4: (2.5) Utilize resíduo no infinito para calcular

$$\int_C \frac{1 + 3z^2}{3z + z^3}\, dz,$$

onde C é um caminho fechado simples, orientado positivamente, contendo todas as raizes do polinômio $3z + z^3$ em seu interior.

Solução: Consideremos $f(z) = \frac{1+3z^2}{3z+z^3}$. Como todas as raízes de $3z + z^3$ estão no interior do caminho C então todas as singularidades de $f(z)$ estão no interior de C. Assim podemos utilizar o Teorema dos resíduos no infinito o qual afirma que:

$$\int_C \frac{1+3z^2}{3z+z^3}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{0.3}$$

Vamos então calcular o resíduo do lado direito. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1+3\frac{1}{z^2}}{3\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z^2+3}{z^2} \cdot \frac{z^3}{3z^2+1} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2+3}{3z^2+1}.\end{aligned}$$

Seja

$$\phi(z) := \frac{z^2+3}{3z^2+1},$$

temos que $\phi(z)$ é analítica em $z_0 = 0$ (pois 0 não é raiz de $3z^2+1$) e $\phi(0) = \frac{0+3}{0+1} = 3$. Assim, como

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\phi(z)}{z}$$

pelo Teorema dos Resíduos em polos segue que $z = 0$ é polo simples de $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \phi(0) = 3.$$

Substituindo em (0.3) temos

$$\int_C \frac{1+3z^2}{3z+z^3}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = 6\pi i.$$

Problema 5:

a) (1.0) Enuncie o teorema da fórmula da integral de Cauchy e sua versão generalizada.

b) (1.5) Seja $P(z)$ um polinômio de grau n tal que $P(0) = 1$, defina

$$Q(z) := z^n \cdot P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ qualquer, calcule

$$\int_C \frac{Q(z)}{(z - z_0)^n} dz,$$

onde C é a curva fechada simples contendo z_0 em seu interior.

Solução:
a) Ver enunciado feito em sala de aula.

b) Como $P(z)$ é um polinômio de grau n podemos escrever

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Substituindo a condição $P(0) = 1$ temos $a_0 = 1$, logo

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1.$$

Agora vamos encontrar a expressão de $Q(z)$. Por definição temos

$$\begin{aligned}
Q(z) &= z^n \cdot P\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= z^n \left(a_n \cdot \frac{1}{z^n} + a_{n-1} \cdot \frac{1}{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{1}{z} + 1\right) \\
&= a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_1 z^{n-1} + z^n.
\end{aligned}$$

Em particular, se derivarmos $Q(z)$ $(n-1)$ vezes teremos:

$$Q^{(n-1)}(z) = (n-1)! \cdot a_1 + n! \cdot z.$$

Agora, como $Q(z)$ é uma função inteira e z_0 é um ponto no interior do caminho fechado C, pelo Teorema da Fórmula de Cauchy generalizada temos:

$$\int_C \frac{Q(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} Q^{(n-1)}(z_0) = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left((n-1)! \cdot a_1 + n! \cdot z_0\right) = 2\pi i (a_1 + n \cdot z_0).$$

Concluindo o que queríamos.

Observação: Apenas por curiosidade observe também que $Q^{(n)}(z) = n!$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$, logo

$$\int_C \frac{Q(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} Q^{(n)}(z_0) = \frac{2\pi i}{n!} \cdot n! = 2\pi i,$$

ou seja, tal integral independe do polinômio $P(z)$ escolhido inicialmente satisfazendo $P(0) = 1$.

Problema 6.(2.5) Calcule a integral

$$\int_C \frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}\, dz$$

onde C é o círculo de centro em $z_0 = 0$ e raio $R = 1/2$ orientado positivamente.

Solução:

A primeira observação a ser feita é que a função dentro da integral possui apenas uma singularidade no interior do círculo C que é $z_0 = 0$. A outra singularidade $z_1 = -1$ está fora de C. Assim, pelo Teorema dos Resíduos temos:

$$\int_C \frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}\, dz = 2\pi i \cdot \underset{z=0}{Res} \frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}.$$

Basta então calcular o resíduo em $z_0 = 0$. Já sabemos que $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ para qualquer $w \in \mathbb{C}$, logo

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^{n+1}}.$$

Agora precisamos encontrar a expansão de $\frac{1}{(z+1)^2}$. Para isto utilizaremos derivação de séries. Observe que

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Assim, derivando ambos os lados da expressão acima obtemos

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot z^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{(1+z)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot z^n.$$

Logo,

$$-\frac{1}{(1+z)^2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z}=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot z^n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\cdot z^{m+1}}\right).$$

O "termo geral" desta multiplicação de séries é da forma:

$$-(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot z^n\cdot\frac{1}{m!\cdot z^{m+1}}=\frac{(-1)^n(n+1)}{m!}\cdot z^{n-m-1}.$$

Para que este termo tenha ordem -1 devemos ter: $n-m-1=-1\Rightarrow m=n$. Neste caso teremos

$$\frac{(-1)^n(n+1)}{m!}\cdot z^{n-m-1}=\frac{(-1)^n(n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{z}.$$

Portanto o resíduo em 0 é dado por:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n!}. \tag{0.4}$$

Agora observe que:

$$z\cdot e^{-z}=z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n!},$$

logo derivando em ambos os lados temos:

$$e^{-z}-ze^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)z^n}{n!}.$$

Calculando em $z=1$ temos:

$$e^{-1}-e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n!}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n!}=0.$$

Finalmente, substituindo em (0.4) temos

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}=0$$

donde segue que

$$\int_C\frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}\,dz=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{1/z}}{z(z+1)^2}=0.$$
