Topologia Geral - MA/MM 453
Lista 4

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Conexidade

1. Mostre que o produto cartesiano de dois espaços conexos é conexo na topologia produto.

2. Seja $\{A_n\}$ uma sequência de subespaços conexos de X tais que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Mostre que $\bigcup A_n$ é conexo.

3. Seja $\{A_\alpha\}$ uma coleção de subespaços conexos de X; seja A um subespaço conexo de X. Mostre que se $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, então $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ é conexo.

4. Seja $A \subset X$. Mostre que se C é um subespaço conexo de X que intersecta ambos A e $X - A$, então C intersecta ∂A.

5. Seja $\mathbb{R}_l$ o conjunto dos reais munido da topologia do limite inferior. Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$.

6. Seja A subespaço próprio de X e B subespaço próprio de Y. Mostre que se X e Y forem conexos então $(X \times Y) - (A \times B)$ também é conexo.

7. Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de espaços conexos; seja X o espaço produto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Seja $a = (a_\alpha)$ um ponto fixado em X.

a) Dado qualquer subconjunto K de J, considere X_K o subespaço de X consistindo de todos os pontos $x = (x_\alpha)$ tais que $x_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$. Mostre que X_K é conexo.

b) Mostre que a união Y dos espaços X_K é conexa.

c) Mostre que $X = \overline{Y}$ e conclua que X é conexo.

noindent 8. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Mostre que se Y for conexo e se $p^{-1}(\{y\})$ é conexo para todo $y \in Y$, então X será conexo.

9. Seja $Y \subset X$ com X e Y conexos. Mostre que se A e B formam uma separação de $X - Y$ então $Y \cup A$ e $Y \cup B$ são conexos.

10. Mostre que a esfera unitária $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$, $n > 1$, é conexa por caminhos.

11. Mostre que nenhum dos espaços $(0,1)$, $(0,1])$ e $[0,1]$ são homeomorfos.

12. Seja $f : S^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

13. Seja $f : X \to X$ contínua. Mostre que se $X = [0,1]$, existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Tal ponto é chamado de ponto fixo de f.

14.

a) Sejam X e Y conjuntos ordenados na topologia da ordem. Mostre que se $f : X \to Y$ preserva ordem e é sobrejetora, então f é um homeomorfismo.

b) Seja X o subespaço $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ de $\mathbb{R}$. Mostre que a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x + 1 \quad \text{se} \quad x < -1$$

e

$$f(x) = x \quad \text{se} \quad x \geq 0,$$

é sobrejetora e preserva ordem. É verdade que f é um homeomorfismo? Compare com (a).

15. Mostre que se A é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}^2$ então $\mathbb{R}^2 - A$ é conexo por caminhos.

16. Mostre que se U é um subespaço aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$, então U é conexo por caminhos.

17. Seja A um subespaço conexo de X. É verdade que ∂A e $\mathrm{Int}(A)$ são conexos?

18. Seja X localmente conexo por caminhos. Mostre que todo aberto conexo em X é também conexo por caminhos.

19. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Mostre que se X for localmente conexo, então Y será localmente conexo.

20. Seja G um grupo topológico; seja C a componente conexa de G contendo a identidade e. Mostre que C é um subgrupo normal de G.

2 Compacidade I

21. Mostre que se X e Y são espaços compactos então $X \times Y$ é compacto.

22.

a) Mostre que na topologia do complemento finito em $\mathbb{R}$, todo subespaço é compacto.

b) Se $\mathbb{R}$ tem a topologia formada por todos os conjuntos da forma $\mathbb{R} - A$ onde A é enumerável ou todo o $\mathbb{R}$, o conjunto $[0, 1]$ é compacto?

23. Mostre que união finita de subespaços compactos é compacto.

24. Mostre que todo espaço métrico compacto é limitado e fechado.

25. Sejam $A, B \subset X$ dois subespaços compactos de um espaço de Hausdorff X. Mostre que existem abertos $U, V \subset X$ tais que

$$A \subset U, \ B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

26. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua, X é compacto e Y é Hausdorff, então f é fechada.

27. Mostre que se Y for compacto então a projeção $\pi_1 : X \times Y \to X$ será uma aplicação fechada.

28. Seja $f : X \to Y$, Y compacto. Mostre que f é contínua se, e somente se, o gráfico de f, $G_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.