

**UNICAMP**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

MARCELIS ESPITIA NORIEGA

**Ergodicidade de difeomorfismos de Anosov de  
classe  $C^2$**

Campinas

2019

Marcelis Espitia Noriega

## **Ergodicidade de difeomorfismos de Anosov de classe $C^2$**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Gabriel Ponce

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Marcelis Espitia Noriega e orientada pelo Prof. Dr. Gabriel Ponce.

Campinas

2019

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Es65e Espitia Noriega, Marcielis, 1992-  
Ergodicidade de difeomorfismos de Anosov de classe  $C^2$  / Marcielis  
Espitia Noriega. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Gabriel Ponce.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Folheações  
(Matemática). 4. Anosov, Difeomorfismos de. I. Ponce, Gabriel, 1989-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Ergodicity of Anosov diffeomorphisms of class  $C^2$

**Palavras-chave em inglês:**

Dynamical systems theory

Ergodic theory

Foliations (Mathematics)

Anosov diffeomorphisms

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestra em Matemática

**Banca examinadora:**

Gabriel Ponce [Orientador]

Douglas Duarte Novaes

Fernando Pereira Micena

**Data de defesa:** 08-03-2019

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-8541-8646>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5453351276139455>

**Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2019 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). GABRIEL PONCE**

**Prof(a). Dr(a). DOUGLAS DUARTE NOVAES**

**Prof(a). Dr(a). FERNANDO PEREIRA MICENA**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

# Agradecimentos

*Agradeço, primeiramente, a Deus por absolutamente tudo.*

*À minha família pelo amor incondicional.*

*Ao meu orientador, Prof. Dr. Gabriel Ponce, pela paciência, disposição e inúmeras horas que dedicou a me ajudar.*

*Ao meu esposo, namorado e amigo, Juan que esteve sempre ao meu lado nestes últimos 5 anos.*

*À todos meus professores pela experiência e conhecimento compartilhado.*

*À FAEPEX/FUNCAMP pelo apoio financeiro (Bolsa de Mestrado [2242/17]).*

# Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo estudar as propriedades fundamentais dos sistemas dinâmicos centrando nossa atenção nos difeomorfismos de Anosov de classe  $C^2$ . Faremos observações sobre características relevantes para esta classe de difeomorfismo, sendo nosso resultado principal a ergodicidade destes difeomorfismos. A demonstração da ergodicidade de tais difeomorfismos será feita a partir de uma análise geométrica, usando o argumento de Hopf, mostrando primeiro a existência e continuidade absoluta das folheações estável e instável e então usando o argumento de Hopf concluir a ergodicidade dos difeomorfismos de Anosov.

*Palavras chaves:* Sistemas dinâmicos hiperbólicos, Difeomorfismo de Anosov, variedade estável, variedade instável, teoria ergódica, argumento de Hopf.

# Abstract

This thesis aims to study of the fundamental properties of the dynamical systems focusing our attention on the Anosov diffeomorphism of class  $C^2$ . We will make observations about relevant characteristics of this class of diffeomorphism, being our main result that these diffeomorphisms are ergodic. The proof of the ergodicity of Anosov diffeomorphisms will be made from a geometric analysis using the Hopf argument showing first the existence and absolute continuity of the stable and unstable foliations, and then using Hopf's argument to conclude the ergodicity of Anosov's diffeomorphisms.

*Keywords:* Hyperbolic dynamical systems, Anosov diffeomorphism, stable manifold, unstable manifold, ergodic theory, Hopf argument.

# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Aplicações com órbitas convergentes</b>	<b>12</b>
1.1.1	Contrações	12
1.1.2	Aplicações Lineares	15
<b>1.2</b>	<b>Preliminares em Teoria Ergódica</b>	<b>18</b>
1.2.1	Espaços de medida	18
1.2.2	Ergodicidade	20
<b>1.3</b>	<b>Preliminares topológicas</b>	<b>26</b>
1.3.1	Grau Topológico	26
1.3.2	Estrutura Riemanniana	27
1.3.3	Fibrados	28
1.3.4	Folheações	30
<b>2</b>	<b>DINÂMICA HIPERBÓLICA LOCAL</b>	<b>32</b>
<b>2.1</b>	<b>Variedades estáveis e instáveis</b>	<b>32</b>
2.1.1	Pontos fixos hiperbólicos	32
2.1.2	Teorema de Hadamard-Perron	33
<b>2.2</b>	<b>Conjuntos hiperbólicos e Difeomorfismos de Anosov</b>	<b>48</b>
2.2.1	Variedades estáveis e instáveis para conjuntos hiperbólicos	50
2.2.2	Continuidade Hölder das distribuições estável e instável	53
<b>3</b>	<b>CONTINUIDADE ABSOLUTA DAS FOLHEAÇÕES ESTÁVEL E INSTÁVEL</b>	<b>57</b>
<b>3.1</b>	<b>Definições e Teorema principal</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Pré-folheações e Lemas auxiliares</b>	<b>58</b>
<b>3.3</b>	<b>Demonstração do Teorema 3.1</b>	<b>61</b>
<b>3.4</b>	<b>Consequências da Continuidade Absoluta</b>	<b>68</b>
<b>3.5</b>	<b>Exemplo de uma folheação não absolutamente contínua</b>	<b>70</b>
<b>4</b>	<b>ARGUMENTO DE HOPF E MULTIPLE MIXING</b>	<b>74</b>
<b>4.1</b>	<b>Argumento de Hopf</b>	<b>74</b>
<b>4.2</b>	<b>Multiple Mixing</b>	<b>76</b>
<b>4.3</b>	<b>O Argumento de Hopf Unilateral</b>	<b>77</b>

4.4	O Argumento de Hopf Bilateral . . . . .	79
4.5	Estrutura de Produto e Continuidade Absoluta II . . . . .	81
4.6	Consequências . . . . .	82
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>87</b>

# Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos é uma área recente da matemática, tendo sua origem no final do século XX com os estudos de Mecânica Celeste de Newton e com os trabalhos de Henri Poincaré, relativos aos estudos de movimentos dos corpos celestes, tais como planetas e cometas, cuja abordagem até então estava focada no sentido de resolver equações diferenciais, que em sua maioria não podem ser resolvidas por meio de fórmulas e cálculos. Poincaré propôs então utilizar ferramentas vindas de áreas como Topologia, Geometria, Álgebra e Análise para obter uma descrição qualitativa e, quando possível, quantitativa do sistema. Por volta da década de 1960 grandes matemáticos como Birkhoff, Smale, Palis, Anosov, Arnold, Sinai e muitos outros fizeram contribuições fundamentais nesta área, comprovando assim, a força da ideia de Poincaré.

A noção geral de um sistema dinâmico consiste em uma variedade ambiente  $M$  e uma lei  $f : M \rightarrow M$ , a tempo discreto ou contínuo, que relaciona seu estado presente com seu estado passado e futuro. A teoria dos Sistemas Dinâmicos busca descrever a evolução temporal das órbitas do sistema através da identificação de padrões e do seu comportamento assintótico. Uma forma particular de obter informação sobre a evolução de um sistema dinâmico em um espaço com uma medida invariante, é estudar suas propriedades estatísticas e geométricas de medidas invariantes, o estudo destas propriedades constituem a *teoria ergódica*. Mais precisamente, considere variedade ambiente  $M$  dotada com uma medida de probabilidade  $\mu$  e  $f$  uma aplicação invariante pela medida  $\mu$ , ou seja,  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$  para todo o conjunto  $A$  mensurável. A teoria ergódica busca descrever as propriedades que são válidas para quase toda trajetória do sistema com relação à medida  $\mu$ . Dizemos que um sistema tem propriedade de ergodicidade, ou que é ergódico se os únicos conjuntos onde as órbitas de todos os pontos do conjunto pertencem ao conjunto têm medida zero ou um, isto é,  $f : M \rightarrow M$  é ergódica se para todo conjunto mensurável  $E \subset M$  com  $f^{-1}(E) \subset E$ , temos  $\mu(E) = 0$  ou  $\mu(E) = 1$ .

Na década de 1960 o matemático russo Dmitri Victorovich Anosov, estudou uma classe de sistemas globalmente hiperbólicos que ficaram conhecidos como *difeomorfismos de Anosov* [1], a qual será o principal objeto de estudo deste trabalho. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  é dito de Anosov se existe uma métrica riemanniana e uma decomposição do espaço tangente  $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$  tais que  $D_x f(E^s(x)) = E^s(f(x))$  e  $D_x f(E^u(x)) = E^u(f(x))$ ,  $D_x f$  restrito a  $E^s_x$  é uma contração uniforme e  $D_x f$  restrito a  $E^u_x$  é uma expansão uniforme. Associamos a estes difeomorfismos a existência de estruturas geométricas dinamicamente invariantes, como é o caso das folheações estável e instável, que são essenciais para a obtenção de propriedades métricas e ergódicas do sistema em questão. Tais estruturas nos permitem identificar diversas propriedades dinâmicas dos difeomorfismos de Anosov e demonstra que tais difeomorfismos,

quando forem  $C^2$  e preservarem a medida de volume, serão ergódicos.

Com intuito de tornar este trabalho autocontido, no primeiro capítulo introduzimos conceitos básicos e exemplos de sistemas dinâmicos e alguns resultados da teoria ergódica para analisar o comportamento de alguns sistemas. Provamos também algumas ferramentas de variedades riemanniana e topologia diferencial que serão de utilidade nos capítulos posteriores. No Capítulo 2 estabelece-se a noção de hiperbolicidade, e conseqüentemente de difeomorfismos de Anosov de classe  $C^2$ , com a construção das folheações estáveis e instáveis, dadas por um difeomorfismo de Anosov, usando o método de Hadamard-Perron para a construção das famílias de variedades que constituem estas folheações. No Capítulo 3, demonstramos a continuidade absoluta destas folheações. No Capítulo 4 estudaremos a ergodicidade de um difeomorfismo Anosov de classe  $C^2$  que preservam volume através do conhecido argumento de Hopf, uma técnica desenvolvida por Eberhard Hopf [7], este argumento é a principal ferramenta para derivar a ergodicidade da hiperbolicidade na ausência de uma estrutura algébrica (a ferramenta alternativa é a teoria dos estados de equilíbrio). O argumento aqui empregado é baseado em um resultado recente de Coudène, Hasselblatt e Troubetzkoy [4] e demonstra, na verdade mais do que ergodicidade, tal argumento tem a vantagem de ser adaptável para casos mais gerais e aproveita as informações dinâmicas fornecidas pelo sistema.

# 1 Preliminares

Com o objetivo de fazer este trabalho autocontido, neste capítulo serão apresentados de forma rápida uma breve introdução à dinâmica hiperbólica, apresentaremos também elementos básicos da teoria ergódica e um exemplo de aplicação do argumento de Hopf para uma transformação linear, que será posteriormente usado de forma mais geral, junto com outros resultados de nosso interesse (uma introdução mais detalhada a tais aspetos da teoria podem ser encontrados em [8], [16], [3], [9], [10] e [15]).

## 1.1 Aplicações com órbitas convergentes

### 1.1.1 Contrações

Esta seção é dedicada ao estudo de um dos exemplos mais simples e importantes de sistemas dinâmicos, uma aplicação de contração em um espaço métrico. A partir das aplicações de contração obtemos o Princípio de contração de Banach que será de ajuda nos próximos capítulos.

**Definição 1.1.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. A aplicação  $f : X \rightarrow X$  é dita uma contração se existe  $0 < \lambda < 1$  tal que para quaisquer  $x, y \in X$*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y). \quad (1.1)$$

Notemos que a desigualdade (1.1) implica a continuidade da aplicação  $f$ .

O seguinte resultado é fundamental e fornece a imagem completa, e muito simples, do comportamento assintótico para o sistema dinâmico gerado por uma aplicação de contração.

**Proposição 1.1** (Princípio de Contração de Banach). *Seja  $X$  um espaço métrico completo e  $f : X \rightarrow X$  uma contração. Então  $f$  tem um único ponto fixo  $p \in X$  e para todo  $x \in X$  a órbita de  $x$  converge exponencialmente a  $p$ .*

*Demonstração.* Iterando (1.1), temos que para qualquer inteiro  $n$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n \cdot d(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in X, \quad (1.2)$$

então como  $0 < \lambda < 1$  temos

$$d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como consequência, para todo  $x \in X$  a sequência de  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy, pois para todo  $m \geq n$

$$d(f^m(x), f^n(x)) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} d(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)) \quad (1.3)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} d(f(x), x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x) \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Portanto, para todo  $x \in X$  a sequência  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente e o limite não depende de  $x$ .

Seja  $p$  o limite de  $\{f^n(x)\}$ , então

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = p,$$

ou seja,  $p$  é ponto fixo de  $f$ . Dado que  $f$  é uma contração,  $p$  é o único ponto fixo de  $f$ .

Finalmente, tomando o limite quando  $m$  vai para infinito em (1.3) temos que

$$d(p, f^n(x)) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x),$$

Assim, a sequência  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $p$ . □

Portanto, o Princípio de Contração de Banach garante que para uma aplicação de contração a órbita de qualquer ponto converge para um único ponto fixo. Este resultado será usado no decorrer de nosso estudo, o qual será aplicado, não ao sistema dinâmico original no espaço de fase, mas a uma determinada transformação em um espaço funcional associado ao sistema dinâmico.

Como primeiro exemplo de aplicação deste princípio, mostraremos que, assumindo uma condição de não degeneração no diferencial, a existência de um ponto periódico de período  $m$  é estável sob pequenas perturbações.

**Proposição 1.2.** *Seja  $p$  um ponto periódico de período  $m$  de uma aplicação  $f$  de classe  $C^1$  tal que o diferencial  $Df_p^m$  não possui 1 como autovalor. Se  $g$  é uma aplicação suficientemente perto de  $f$  na topologia  $C^1$ , então existe um único ponto periódico de  $g$  com período  $m$  localizado perto de  $p$ .*

*Demonstração.* Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $p = 0$  e  $m = 1$ . Consideremos a aplicação  $F := f - Id$ . Dado que 1 não é autovalor de  $Df_0$ , pelo Teorema da aplicação inversa  $F$  é invertível em uma vizinhança compacta  $B$  de 0, a qual podemos tomar como sendo uma bola fechada de raio  $R > 0$ . Seja  $g$  uma aplicação de classe  $C^1$  perto de  $f$ , vejamos que  $g$  tem um único ponto fixo em  $B$ . Consideremos  $H = f - g$ . Então  $x \in B$  é um ponto fixo de  $g$  se, e somente se,

$$x - g(x) = (f - H)(x) = (F + Id - H)(x),$$

isto é, se e somente se  $(F - H)(x) = 0$ , ou equivalentemente  $x = F^{-1} \circ H(x)$ . Assim é suficiente mostrar que  $F^{-1} \circ H$  tem um único ponto fixo em  $B$ . Para este fim, mostremos que  $F^{-1} \circ H$  é uma contração em  $B$ . Tomemos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $\|f - g\| < \varepsilon$ , de forma que  $H(B) \subset B$ . Além disso, se  $L = \max_{x \in B} \|DF^{-1}\|$ , então

$$\|F^{-1}H(0)\| \leq L\|H(0)\| \leq L\varepsilon,$$

pois  $F^{-1}(0) = 0$ . Então

$$\|F^{-1}H(x)\| \leq \|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(0)\| + \|F^{-1}H(0)\| \leq \varepsilon L\|x\| + \varepsilon L.$$

Tomemos  $\varepsilon \leq \frac{R}{L(1+R)}$ , assim, temos que  $F^{-1}H(B) \subset B$ . Finalmente, se  $x, y \in B$  temos

$$\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq L\varepsilon\|x - y\|,$$

logo  $F^{-1}H$  é uma contração em  $B$ . Do princípio de contração segue que  $F^{-1}H$  tem um único ponto fixo em  $B$ , portanto,  $g$  tem um único ponto fixo perto de 0.  $\square$

A seguinte proposição mostra que ao perturbarmos uma contração o seu ponto fixo não sofre uma perturbação muito grande.

**Proposição 1.3.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma contração de um espaço métrico completo  $X$  com ponto fixo  $x_0$  e constante de contração  $\lambda$  como na Definição 1.1, então para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta \in (0, 1 - \lambda)$  tal que para qualquer aplicação  $g : X \rightarrow X$  com*

1.  $d(f(x), g(x)) < \delta$  para  $x \in X$  e
2.  $d(g(x), g(y)) < (\lambda + \delta)d(x, y)$  para  $x, y \in X$ ,

$g$  possui um ponto fixo  $y_0$  tal que  $d(x_0, y_0) \leq \varepsilon$ .

*Demonstração.* Observe que pela condição 2  $g$  é uma contração, logo ela possui um ponto fixo  $y_0$ . Tome  $\delta = \frac{\varepsilon(1 - \lambda)}{1 + \varepsilon}$ . Dado que  $g^n(x_0) \rightarrow y_0$ , temos

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} d(g^n(x_0), g^{n+1}(x_0)) < d(x_0, g(x_0)) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + \delta)^n \\ &< \frac{\delta}{1 - \lambda - \delta} = \frac{\varepsilon(1 - \lambda)}{(1 + \varepsilon)(1 - \lambda - \frac{\varepsilon(1 - \lambda)}{1 + \varepsilon})} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

### 1.1.2 Aplicações Lineares

Para estudar a dinâmica de um sistema muitas vezes é suficiente conhecer o comportamento de sua parte linear, por essa razão nesta seção vamos analisar a dinâmica de uma aplicação linear no espaço euclidiano.

**Definição 1.2.** *Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação linear. O conjunto de todos os autovalores de  $A$  é chamado espectro de  $A$  e será denotado por  $\text{sp}(A)$ .*

$$r(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A)\} \text{ é o raio espectral de } A.$$

Dada qualquer norma em  $\mathbb{R}^n$  definimos a norma de uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , por

$$\|A\| := \sup_{\|v\|=1} \{ \|Av\| \}.$$

Note que  $\|A\| \geq r(A)$ , e se  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$  então  $\|A\| = r(A)$  sempre que  $A$  for diagonal.

**Proposição 1.4.** *Para todo  $\delta > 0$  existe uma norma em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\|A\| < r(A) + \delta$*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B}$  uma base de Jordan para  $\mathbb{R}^n$ , assim,  $A$  é representada pela matriz canônica de Jordan:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

onde cada bloco é um bloco Jordan correspondente a um autovalor real  $\lambda$ ;

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

ou uma combinação de dois blocos correspondentes aos autovalores de conjugados complexos  $\lambda = \rho e^{i\varphi}$  e  $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\varphi}$

$$\begin{pmatrix} \rho R_\varphi & Id & & 0 \\ & \rho R_\varphi & Id & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \rho R_\varphi & Id \\ 0 & & & & \rho R_\varphi \end{pmatrix}$$

onde  $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  e  $Id$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .

Para  $t \in \mathbb{R}$ , denotemos por  $A(t)$  a matriz com a mesma estrutura do bloco de Jordan, onde cada um imediatamente acima da diagonal é substituído por  $t$ . Em seguida, colocamos em  $\mathbb{R}^n$  o produto escalar (hermitiano) para o qual a base  $\mathcal{B}$  é ortonormal e denotamos por  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  a norma correspondente a este produto. Agora,  $t \mapsto \|A(t)\|_{\mathcal{B}}$  é uma função contínua e  $\|A(0)\|_{\mathcal{B}} = r(A)$ . Portanto, dado  $\delta > 0$  podemos encontrar  $t_\delta > 0$  tal que  $\|A(t_\delta)\|_{\mathcal{B}} < r(A) + \delta$ . Mas,  $A(t_\delta) = BAB^{-1}$ , onde  $B$  é a matriz diagonal composta por blocos da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & t_\delta^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_\delta^{-m+1} \end{pmatrix}$$

para cada bloco de ordem  $m$  do primeiro tipo, e por blocos da forma:

$$\begin{pmatrix} Id & & & \\ & t_\delta^{-1} Id & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_\delta^{-m+1} Id \end{pmatrix}$$

para cada bloco de ordem  $2m$  do segundo tipo.

Definamos  $\|v\| = \|B \cdot v\|_{\mathcal{B}}$ , então

$$\|A\| = \|A(t_\delta)\|_{\mathcal{B}} < r(A) + \delta.$$

□

Uma vez que todas as normas em  $\mathbb{R}^n$  são equivalentes, temos que para qualquer norma  $\|\cdot\|$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon$  tal que para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|A^n v\| \leq C_\varepsilon (r(A) + \varepsilon)^n \|v\|.$$

**Corolário 1.1.** *Suponha que todos os autovalores de uma aplicação linear possuam módulos menores que 1. Então existe uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A$  é uma contração com respeito à métrica gerada por essa norma.*

*Demonstração.* Tomando  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, pela Proposição 1.4 existe uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^n$  na qual  $L := \|A\| < 1$ . Consideremos  $d(x, y) = \|x - y\|$ , logo segue que  $A$  é uma contração, pois

$$d(A(x), A(y)) = \|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\| = Ld(x, y).$$

□

**Corolário 1.2.** *Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear, se  $r(A) < 1$  então,  $A^n(x) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Além disso, se  $A$  é invertível  $A^{-n}x \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Escolhamos  $\delta > 0$  tal que  $r(A) + \delta < 1$ , temos então

$$\|A^n v\| \leq C_\delta (r(A) + \delta)^n \|v\|, n \rightarrow \infty.$$

Se  $A$  é invertível, tomamos  $v = A^{-n}(w)$ , logo  $\|w\| \leq C_\delta (r(A) + \delta)^n \|A^{-n}(w)\|$ , então

$$\frac{1}{C_\delta (r(A) + \delta)^n} \|w\| \leq \|A^{-n}(w)\| \rightarrow \infty.$$

□

A dinâmica de uma transformação linear é, portanto, altamente influenciada pelos autovalores da transformação. No que segue distinguimos as aplicações lineares segundo a existência, ou não, de autovalores com módulo 1.

**Definição 1.3.** *Dizemos que uma transformação  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é hiperbólica se todos os seus autovalores têm módulo diferente de 1.*

**Definição 1.4.** *Sejam  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear e  $\lambda \in \mathbb{C}$  um autovalor de  $A$ , se  $\lambda \in \mathbb{R}$  denotaremos por  $E_\lambda$  ao autoespaço generalizado correspondente a  $\lambda$ , isto é, o espaço de todos os vetores  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(A - \lambda I)^k \cdot v = 0$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Analogamente, se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  para o par de autovalores complexos conjugados  $\lambda, \bar{\lambda}$  seja  $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$  a interseção de  $\mathbb{R}^n$  com a soma dos autoespaços generalizados a  $E_\lambda, E_{\bar{\lambda}}$  na extensão de  $A$  ao espaço complexo  $\mathbb{C}^n$ . Usando estes espaços, definimos os seguintes subespaços:*

$$\begin{aligned} E^- &= E^-(A) = \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}} \\ E^+ &= E^+(A) = \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}} \\ E^0 &= E^0(A) = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

**Corolário 1.3.** *Existe uma norma tal que a restrição da aplicação linear ao autoespaço  $E^-(A)$  é uma contração. Além disso, se  $A$  é invertível então a restrição de  $A^{-1}$  ao subespaço  $E^+(A)$  com respeito a esta mesma norma é uma contração.*

**Definição 1.5.** *O espaço  $E^-$  é chamado de subespaço de contração e o espaço  $E^+$  é chamado de subespaço de expansão.*

**Proposição 1.5.** *Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação hiperbólica, então:*

1. Para todo  $v \in E^-$ , o iterado positivo  $A^n v \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $A$  for invertível então o iterado negativo  $A^{-n} v \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow -\infty$ .
2. Para todo  $v \in E^+$  o iterado positivo de  $A^n v \rightarrow \infty$ . Se  $A$  for invertível então  $A^{-n} v \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
3. Para todo  $v \in \mathbb{R}^n \setminus (E^- \cup E^+)$  o iterado  $A^n v \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $A$  for invertível o mesmo acontece quando  $n \rightarrow -\infty$ .

## 1.2 Preliminares em Teoria Ergódica

### 1.2.1 Espaços de medida

Dado que queremos estudar o comportamento de funções em espaços com medida, apresentamos de modo sucinto os fundamentos da teoria desses espaços.

**Definição 1.6.** Uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  é uma família  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  que é fechada para as operações elementares de conjuntos e que contém o conjunto vazio, isto é, tal que

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \in \mathcal{A}$  implica  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A_j \in \mathcal{A}$  para  $j = 1, \dots, n, \dots$  implica  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ .

**Definição 1.7.** Um espaço mensurável é uma dupla  $(X, \mathcal{A})$  onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ . Os elementos de  $\mathcal{A}$  são chamados conjuntos mensuráveis do espaço.

**Definição 1.8.** Uma medida em  $(X, \mathcal{A})$  é uma aplicação  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $\mu(\emptyset) = 0$  e

$$\mu \left( \bigcup_{A_j}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \text{ para quaisquer } A_j \in \mathcal{A} \text{ disjuntos dois a dois.}$$

A tripla  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é chamada espaço de medida. Quando vale  $\mu(X) < \infty$  dizemos que  $\mu$  é uma medida finita e se  $\mu(X) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma probabilidade. Neste caso,  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é um espaço de probabilidade. Escrevemos  $(X, \mu)$  para denotar o espaço de medida quando não seja necessário especificar a  $\sigma$ -álgebra.

Dados dois espaços mensuráveis  $(X, \mathcal{A})$  e  $(Y, \mathcal{B})$ , dizemos que uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é mensurável se para todo conjunto  $A \in \mathcal{B}$ ,  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ . Uma medida  $\mu$  é dita invariante por uma função  $f$  se

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \text{ para todo conjunto mensurável } A \subset X.$$

Dizemos que uma propriedade é válida em  $\mu$ -quase todo ponto se é válida em todo  $X$  exceto, possivelmente, num conjunto de medida nula.

Seja  $(M, \mu, \mathcal{B})$  um espaço de probabilidade, onde  $M$  é um espaço métrico compacto,  $\mu$  uma medida de probabilidade e  $\mathcal{B}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de  $M$ ). Dada uma partição  $\mathcal{P}$  de  $M$  por conjuntos mensuráveis, definimos o espaço de medida  $(\mathcal{P}, \hat{\mu}, \hat{\mathcal{B}})$  como segue: seja  $\pi : M \rightarrow \mathcal{P}$  a projeção canônica que associa a cada ponto de  $M$  o elemento da partição que o contém, definimos  $\hat{\mu} := \pi_*\mu$  e  $\hat{\mathcal{B}} := \pi_*\mathcal{B}$ .

**Definição 1.9.** *Seja  $\mathcal{P}$  uma partição. Uma família  $\{\mu_P\}$  é dita um sistema de medidas condicionadas, ou uma desintegração de medida, para  $\mu$  (com respeito a  $\mathcal{P}$ ) se*

1. Dada  $\psi \in C^0(M)$ , então  $P \mapsto \int \psi d\mu_P$  é mensurável;
2.  $\mu_P(P) = 1$   $\hat{\mu}$ -quase todo ponto;
3. se  $\psi \in C^0(M)$ , então  $\int_M \psi d\mu = \int_{\mathcal{P}} \left( \int_P \psi d\mu_P \right) d\hat{\mu}$ .

**Proposição 1.6.** [12] *Se  $\{\mu_P\}$  e  $\{\nu_P\}$  são desintegrações de  $\mu$  com respeito a  $\mathcal{P}$ , então  $\mu_P = \nu_P$  para  $\hat{\mu}$ -quase todo  $p \in \mathcal{P}$ .*

**Definição 1.10.** *Dizemos que  $\mathcal{P}$  é uma partição mensurável se, existe um conjunto mensurável  $M_0 \subset M$  com medida total tal que, restrito a  $M_0$ ,*

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n,$$

para alguma sequência crescente  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots, < \mathcal{P}_n < \dots$  de partições enumeráveis, onde  $\mathcal{P}_i < \mathcal{P}_{i+1}$  significa que todo elemento de  $\mathcal{P}_{i+1}$  está contido em algum elemento de  $\mathcal{P}_i$ . Então dizemos que  $\mathcal{P}_i$  é menos fina do que  $\mathcal{P}_{i+1}$ . Além disso,  $\bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$  é a partição menos fina tal que

$$\mathcal{P}_n < \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \text{ para todo } n.$$

Os elementos são as interseções não vazias da forma  $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$  com  $P_n \in \mathcal{P}_n$  para todo  $n$ .

**Teorema 1.1** (Desintegração de Rokhlin). *Seja  $\mathcal{P}$  uma partição mensurável para o conjunto compacto  $M$  e  $\mu$  uma probabilidade borel. Então existe uma desintegração de  $\mu$ .*

## 1.2.2 Ergodicidade

A Teoria Ergódica entre outras coisas se preocupa em estudar a dinâmica das transformações que preservam medida.

Nesta seção apresentamos através de três exemplos como provar a ergodicidade de um sistema; um deles, o argumento de Hopf que será usado posteriormente no estudo da ergodicidade em uma situação mais complexa, que é o caso de difeomorfismos de Anosov. Iniciamos esta seção apresentando um dos resultados fundamentais da Teoria Ergódica, o Teorema Ergódico de Birkhoff.

**Teorema 1.2** (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação mensurável e seja  $\mu$  uma medida de probabilidade invariante por  $f$ . Dada qualquer função mensurável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

*existe em  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$ . Além disso, a função  $\tilde{\varphi}$  está bem definida desta forma, é integrável e satisfaz*

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

O limite  $\tilde{\varphi}$  é chamado *média temporal*, ou *média orbital* de  $\varphi$ . A proposição a seguir mostra que as médias temporais são constantes ao longo de órbitas em quase todo ponto.

**Proposição 1.7.** *Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então*

$$\tilde{\varphi}(f(x)) = \tilde{\varphi}(x) \text{ para } \mu\text{-quase todo ponto } x \in M.$$

**Definição 1.11.** *Uma transformação  $f$  que preserva medida é dita ergódica se para todo conjunto invariante  $A$ ,  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(X \setminus A) = 0$ . Equivalentemente,  $f$  é ergódica se toda função  $\varphi$  mensurável e invariante por  $f$  é constante em quase todo ponto, isto é,  $\varphi \circ f = \varphi$  implica  $\varphi = \text{const.}$  em  $\mu$ -quase todo ponto.*

**Definição 1.12.** *A função  $f$  é dita totalmente ergódica se  $f^n$  é ergódica para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

Existem diversas outras caracterizações da ergodicidade como demonstra o seguinte teorema.

**Teorema 1.3.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é uma transformação que preserva medida em um espaço de probabilidade  $(X, \mu)$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $f$  é ergódica;
2. se  $A$  é um conjunto invariante e  $\mu(f^{-1}(A) \Delta A) = 0$ , então  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A) = 1$ , onde  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;

3. para todo  $A$  mensurável com  $\mu > 0$  temos  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}A\right) = 1$ ;
4. para todo  $A$  e  $B$  mensurável com  $\mu(A) > 0$  existe  $n > 0$  com  $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$ .

No que segue damos alguns exemplos de sistemas ergódicos.

**Exemplo 1.1.** (*Rotação no Toro*)

Considere na reta  $\mathbb{R}$  a relação de equivalência  $\sim$  que identifica quaisquer números cuja diferença é um número inteiro, isto é:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Representamos por  $[x]$  a classe de equivalência de qualquer  $x \in \mathbb{Z}$  e denotamos por  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  o espaço de todas as classes de equivalência. Este espaço é chamado de *círculo* e também o denotamos por  $S^1$ . Outra caracterização de  $S^1$  pode ser dada por meio da aplicação

$$\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \{x \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad [x] \mapsto e^{2\pi xi}.$$

Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ , chamamos *rotação* de ângulo  $\theta$  a transformação

$$R_\theta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad [x] \mapsto [x + \theta] = [x] + [\theta]$$

Da definição segue que  $R_0$  é a identidade e  $R_\theta \circ R_\tau = R_{\theta+\tau}$  para todo  $\theta$  e  $\tau$ . Em particular toda rotação é invertível e a inversa é  $R_{-\theta}$ . Também podemos munir  $S^1$  com uma estrutura de espaço de probabilidade da seguinte forma: seja  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a projeção canônica que associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  a respectiva classe de equivalência  $[x]$ . Primeiramente, dizemos que  $E \subset S^1$  é um conjunto mensurável se  $\pi^{-1}(E)$  for um conjunto mensurável na reta. Em seguida seja  $m$  a medida de Lebesgue na reta. Definimos a *medida de Lebesgue*  $\mu$  no círculo da seguinte forma:

$$\mu(E) = m(\pi^{-1}(E) \cap [k, k + 1)) \quad \text{para qualquer } k \in \mathbb{Z}.$$

Da definição segue que  $\mu$  é uma medida de probabilidade. Além disso,  $\mu$  é invariante por toda rotação  $R_\theta$  (trata-se da única medida de probabilidade com esta propriedade). Se  $\theta$  é racional, digamos  $\theta = p/q$  na forma irredutível, então  $R_\theta^q(x) = x$  para todo  $x \in S^1$ . Logo, dado qualquer segmento  $I \subset S^1$  com comprimento menor que  $1/q$ , o conjunto

$$A = I \cup R_\theta(I) \cup \dots \cup R_\theta^{q-1}(I)$$

é invariante e a sua medida de Lebesgue satisfaz  $0 < \mu(A) < 1$ . Assim, se  $\theta$  é racional a medida de Lebesgue *não* é ergódica.

**Proposição 1.8.** *A rotação  $R_\theta$  é ergódica com respeito à medida de Lebesgue se, e somente se,  $\theta$  é irracional.*

Podemos generalizar as notações usadas da seguinte forma, para cada  $n \geq 1$ , consideremos a relação de equivalência em  $\mathbb{R}^n$  que identifica dois vetores se a sua diferença é um vetor com coordenadas inteiras:

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) \in \mathbb{Z}^n$$

Estas observações estendem-se naturalmente às rotações no  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n$ , para qualquer  $n \geq 1$ .

**Proposição 1.9.** *Se  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  é racionalmente independente então a rotação  $R_\theta : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  é ergódica para a medida de Lebesgue.*

**Exemplo 1.2.** *(Endomorfismos lineares no toro).*

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  de coeficientes inteiros e determinante diferente de zero, Então  $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$  e, por consequência,  $A$  induz uma transformação

$$f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, f_A([x]) = [A(x)].$$

Chamamos tais transformações de *endomorfismos lineares* do toro.

**Teorema 1.4.** *O endomorfismo linear  $f_A$  é ergódico com respeito à medida de Lebesgue  $\mu$  se, e somente se, nenhum autovalor da matriz  $A$  é raiz da unidade.*

*Demonstração.* Consideremos  $\varphi \in L^2(\mu)$  e seja

$$\varphi([x]) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi(k \cdot x)}$$

a sua expansão em série de Fourier. Observemos que  $k \cdot x = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$ . Os coeficientes de  $c_k \in \mathbb{C}$  satisfazem

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2 = \|\varphi\|_2^2 < \infty. \quad (1.6)$$

Então a expansão em série de Fourier de  $\varphi \circ f_A$  é

$$\varphi(f_A([x])) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi(k \cdot A(x))} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi(A^*(k) \cdot x)},$$

onde  $A^*$  representa a adjunta de  $A$ . Suponha que  $\varphi$  é uma função invariante por  $f$ , então pela unicidade da expansão de Fourier, temos que

$$c_{A^*(k)} = c_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Afirmamos que a trajetória de todo  $k \neq 0$  pela transformação  $A^*$  é infinita. De fato, se a trajetória de algum  $k \neq 0$  fosse finita então deveria, existir  $l, m \in \mathbb{Z}$  com  $m > 0$  tais que  $A^{l+m}(k) = A^{l*}(k)$ . Isto só poderia acontecer se  $A^*$  tivesse algum autovalor  $\lambda$  tal que  $\lambda^m = 1$ . Mas isto não é possível por hipótese, dado que  $A$  e  $A^*$  tem os mesmos autovalores. Logo a trajetória de todo  $k \neq 0$  é infinita, como afirmamos. Então a igualdade (1.7) com (1.6) implica que  $c_k = 0$  para todo  $k \neq 0$ . Portanto,  $\varphi = c_0$  em  $\mu$ -quase todo ponto. Isto prova a ergodicidade de  $f_A$ . Para provar a recíproca, suponhamos que  $A$  admite algum autovalor que é a raiz da unidade. Então o mesmo vale para  $A^*$ , portanto, existe  $m \geq 1$  tal que 1 é autovalor de  $A^{m*}$ . Como  $A^{m*}$  tem coeficientes inteiros, então existe algum  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  tal que  $A^{m*}(k) = k$ . Fixemos  $k$  e consideremos a função  $\varphi \in L^2(\mu)$  definida por

$$\varphi([x]) = \sum_{i=0}^{m-1} c_k e^{2\pi(x \cdot A^{i*}(k))} = \sum_{i=0}^{m-1} c_k e^{2\pi(A^i(x) \cdot k)}$$

Note que  $\varphi$  é uma função  $f_A$ -invariante, mas não é constante. Logo  $f_A$  não é ergódica.  $\square$

O exemplo a seguir mostra uma outra forma de se demonstrar ergodicidade para certos sistemas. O argumento apresentado aqui é um caso particular do que é atualmente conhecido como argumento de Hopf. Este é aplicado sempre que  $|\det A| = 1$  e a matriz  $A$  é hiperbólica, ou seja,  $A$  não possui autovalores de módulo 1. Este argumento será estendido a sistemas dinâmicos mais gerais, não necessariamente lineares, como é o caso de difeomorfismos de Anosov que são objeto de nosso estudo.

A hipótese de que a matriz  $A$  é hiperbólica significa que o espaço  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito como uma soma direta  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$  tal que:

1.  $A(E^s) = E^s$  e todos os autovalores de  $A \upharpoonright_{E^s}$  têm módulo menor que 1;
2.  $A(E^u) = E^u$  e todos os autovalores de  $A \upharpoonright_{E^u}$  têm módulo maior que 1.

Então existem constantes  $C > 0$  e  $\lambda < 1$  tais que

$$\|A^n(v^s)\| \leq C\lambda\|v^s\| \text{ para todo } v^s \in E^s \text{ e todo } n \geq 0$$

**Exemplo 1.3.** Consideremos  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  o endomorfismo induzido pela matriz  $A$ .

Este exemplo é um dos mais conhecidos na teoria ergódica e sistemas dinâmicos, comumente é chamado de *Arnold's cat map*.

Vejam que  $f_A$  é ergódica. De fato, primeiro estudamos o comportamento da matriz  $A$ , temos que os autovalores da matriz  $A$  são

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 > \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0$$

E os autoespaços associados a cada autovalor são respetivamente:

$$E^u = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x \right\} \text{ e } E^s = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}x \right\}.$$

A família de todos os subespaços de  $\mathbb{R}^2$  da forma  $v + E^s$  com  $v \in \mathbb{R}^2$ , define uma partição de  $\mathbb{R}^2$  na qual  $A$  contrai as distâncias uniformemente dentro de cada subespaço. Analogamente a família de todos os subespaços afins de  $\mathbb{R}^2$  da forma  $v + E^u$  definem uma partição na qual  $A$  expande distâncias ao longo de cada subespaço. Notemos que cada partição por estes subespaços é invariante. Agora consideremos a projeção canônica  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , definamos para cada  $x \in \mathbb{T}^2$  os subespaços estável e instável respectivamente:

$$W^s(x) = \pi(x + E^s) \text{ e } W^u(x) = \pi(x + E^u)$$

Obtemos assim duas famílias de subespaços de  $\mathbb{T}^2$  que definem uma partição  $\mathcal{F}^s = \{W^s(x)\}_{x \in \mathbb{T}^2}$  chamada *folheação estável*, cujos elementos são chamados de *folhas estáveis* e uma partição  $\mathcal{F}^u = \{W^u(x)\}_{x \in \mathbb{T}^2}$  chamada *folheação instável*, aqui os elementos são chamados de *folhas instáveis*. (daremos a definição geral deste conceito no próximo capítulo). Pelas observações anteriores temos que estas folheações são invariantes por  $f_A$ . Além disso,

1. Se  $y \in W^s(x)$ , então  $d(f_A^n(y), f_A^n(x)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ ;
2. Se  $y \in W^u(x)$ , então  $d(f_A^{-n}(y), f_A^{-n}(x)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

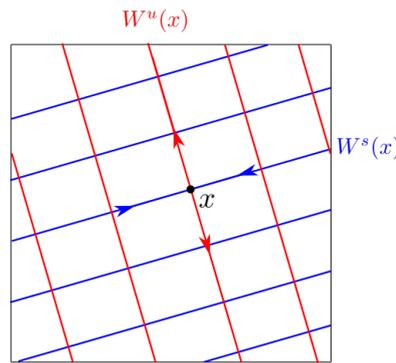


Figura 1 – Folheação estável e instável no toro

O objetivo é usar esta informação geométrica para mostrar que  $(f_A, m)$  é ergódica. Seja  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua qualquer, consideremos as médias temporais

$$\varphi^+(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_A^j(x)) \text{ e } \varphi^-(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_A^{-j}(x))$$

definidas em  $m$ -quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^2$ . Existe um conjunto  $X \subset \mathbb{T}^2$  de medida total tal que

$$\varphi^+(x) = \varphi^-(x) \text{ para todo } x \in X.$$

**Lema 1.1.** *A função  $\varphi^+$  é constante em toda folha de  $\mathcal{F}^s$ , isto é, se  $\varphi^+(x)$  existe e  $y \in W^s(x)$  então  $\varphi^+(y)$  existe e é igual a  $\varphi^+(x)$ . Analogamente,  $\varphi^-$  é constante em toda folha de  $\mathcal{F}^u$ .*

Dado um subconjunto aberto  $\mathbb{R}$  do toro e  $x \in R$  denotamos por  $W^s(x, R)$  a componente conexa de  $W^s(x) \cap R$  que contém  $x$ , e por  $W^u(x, R)$  a componente conexa de  $W^u(x) \cap R$  que contém  $x$ . Chamamos  $R$  de *retângulo* se  $W^s(x, R)$  intersecta  $W^u(y, R)$  num único ponto, para todo  $x, y \in R$ .

**Lema 1.2.** *Dado qualquer retângulo  $R \subset \mathbb{T}^2$ , existe um conjunto mensurável  $Y_R \subset X \cap R$  tal que  $m(R \setminus Y_R) = 0$  e, dado quaisquer  $x, y \in Y_R$ , existem pontos  $x', y' \in x \cap R$  tais que  $x' \in W^s(x, R), y' \in W^s(y, R)$  e  $y' \in W^u(x')$ .*

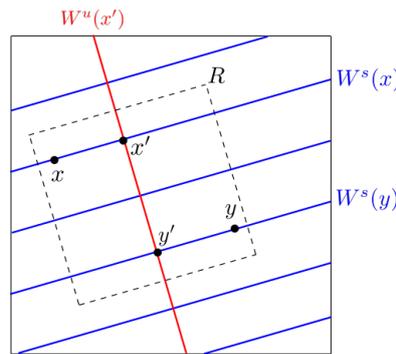


Figura 2 – Retângulo em  $\mathbb{T}^2$

*Demonstração.* Para cada  $x \in \mathbb{T}^2$ , representemos por  $m_x^s$  a medida de Lebesgue na folha estável  $W^s(x)$ . Notemos que  $m(R \setminus X) = 0$ , uma vez que  $X$  tem medida total em  $\mathbb{T}^2$ . Então usando o Teorema de Fubini,

$$0 = m(R \setminus X) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi_{R \setminus X} dm = \int_{W^u(y)} \int_{W^s(x)} \chi_{R \setminus X} dm_x^s dm_y^u$$

o que implica que  $m_x^s(W^s(x, R) \setminus X) = 0$  para  $m$ -quase todo ponto  $x \in R$ . Definamos  $Y_R = \{x \in X \cap R : m_x^s((x, R) \setminus X) = 0\}$ . Então  $Y_R$  tem medida total em  $R$ . Dados  $x, y \in R$  consideremos a aplicação

$$h : W^s(x, R) \rightarrow W^s(y, R), h(x') = \text{interseção entre } W^u(x', R) \text{ e } W^s(y, R)$$

Esta aplicação é absolutamente contínua, isto é:

$$m_x^s(E) = 0 \iff m_y^s(h(E)) = 0.$$

Em particular, a imagem de  $W^s(x, R) \cap X$  tem medida total em  $W^s(y, R)$ , portanto, ela intersecta  $W^s(y, R) \cap X$ . Mas isto significa que existe  $x' \in W^s(x, R) \cap X$  cuja imagem  $y' = h(x') \in W^s(y, R) \cap X$ . Notemos que  $x'$  e  $y'$  estão na mesma folha estável, pela definição de  $h$ , logo  $x', y'$  satisfazem as condições do lema.  $\square$

Consideremos um rectângulo  $R$  qualquer. Dados  $x, y \in Y_R$ , consideremos os pontos  $x', y' \in X$  dados pelo Lema 1.2. Usando el Lema 1.1, obtemos

$$\varphi^-(x) = \varphi^+(x) = \varphi^+(x') = \varphi^-(x') = \varphi^-(y') = \varphi^+(y) = \varphi^-(y).$$

Assim, as funções  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$  coincidem e são constantes em  $Y_R$ . Agora, seja  $R_1, \dots, R_N$  uma cobertura finita do toro por retângulos. Consideremos o conjunto

$$Y = \bigcup_{j=1}^N Y_j, \text{ onde } Y_j = Y_{R_j}.$$

Note que  $m(Y) = 1$ , uma vez que  $Y \cap R_j \supset Y_j$  tem medida total em  $R_j$  para todo  $j$ . Afirmamos que  $\varphi^+ = \varphi^-$  é constante em todo  $Y$ ; desta forma as médias temporais  $\varphi^\pm$  de qualquer função  $\varphi$  são constantes em  $m$ -quase todo ponto. Consequentemente  $(f_A, m)$  é ergódico.

### 1.3 Preliminares topológicas

Nesta seção apresentamos resultados importantes da topologia em variedades e folheações que se fazem necessários para uma leitura mais didática e compreensiva.

#### 1.3.1 Grau Topológico

Sejam  $M$  e  $N$  variedades compactas orientadas de mesma dimensão. Se  $f : M \rightarrow N$  é de classe  $C^r$ ,  $r \leq 1$ , e  $y \in N$  é um valor regular de  $f$ , definimos o grau de  $f$  em relação a  $y$  como o inteiro

$$\text{deg}(f, y) = \sum_{f(x)=y} \text{sinal}(x).$$

Onde

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } D_x f \text{ preserva orientação} \\ -1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 1.5.** *As seguintes afirmações respeito ao grau topológico são verdadeiras:*

1. *Sejam  $y_1, y_2$  dois valores regulares de  $f \in C^r(M, N)$ ,  $r \geq 1$ , então  $\text{deg}(f, y_1) = \text{deg}(f, y_2)$ , e definimos como grau de  $f$ ,  $\text{deg}(f) = \text{deg}(f, y_1)$ .*
2. *Sejam  $f, g \in C^r(M, N)$ , com  $r \geq 1$ , se  $f$  e  $g$  são homotópicas então  $\text{deg}(f) = \text{deg}(g)$ .*

### 1.3.2 Estrutura Riemanniana

**Definição 1.13.** *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) sobre uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (isto é, uma forma linear, simétrica definida positiva) sobre o espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferencialmente no seguinte sentido: se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .*

Uma métrica Riemanniana induz uma distância  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$d(p, q) = \inf\{l(\alpha) : \alpha : [0, 1] \rightarrow M, C^1 \text{ por partes}, \alpha(0) = p, \alpha(1) = q\},$$

onde  $l(\alpha) = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\|_{\alpha(t)} dt$  é o comprimento de  $\alpha$  e  $\left( \left\| \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\|_{\alpha(t)} \right) = \left\langle \frac{d}{dt} \alpha(t), \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\rangle_{\alpha(t)}$ .

**Definição 1.14.** *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.*

Dada uma variedade Riemanniana orientável  $M$  vamos mostrar como a métrica Riemanniana nos permite definir uma noção de volume em  $M$ .

Sejam  $p \in M$  e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  uma parametrização em torno de  $p$  que pertence a uma família de parametrizações consistentes com a orientação de  $M$  (dizemos que tais parametrizações são positivas). Consideremos uma base ortonormal positiva  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_pM$  e  $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$  na base  $\{e_i\}$ ,  $X_i(p) = \sum_j a_{ij} e_j$ . Então

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{j,l} a_{ij} a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle$$

Uma vez que o volume  $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p))$  do paralelepípedo formado pelos vetores  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  em  $T_pM$  é igual ao  $\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$  multiplicado pelo determinante da matriz  $(a_{ij})$ , obtemos

$$\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})(p)}.$$

Seja  $R \subset M$  um subconjunto aberto e conexo com fecho compacto. Suponhamos que  $R$  está contido em uma vizinhança  $\mathbf{x}(U)$  com uma parametrização positiva  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  e que a fronteira de  $M$  tem medida zero em  $\mathbb{R}^n$  (note que a noção de medida zero em  $\mathbb{R}^n$  é invariante por difeomorfismos). Definamos o volume de  $R$ ,  $\text{vol}(R)$  por:

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n.$$

Pode-se provar que esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas. Para definir o volume de uma região compacta  $R$ , que não esteja contida em uma vizinhança coordenada, é necessário considerar uma partição da unidade  $\{\varphi_i\}$  subordinada a uma cobertura (finita) de  $R$  que consiste nas vizinhanças coordenadas  $\mathbf{x}(U_i)$  e fazendo

$$\text{vol}(R) = \sum_i \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \varphi_i \omega,$$

onde  $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n$ . A forma  $\omega$  é chamada *forma volume* ou *elemento de volume* em  $M$ .

### 1.3.3 Fibrados

Vamos dar de forma breve algumas noções básicas sobre fibrados vetoriais, seções, distribuições e um resultado sobre aproximação de distribuições que será usado em um dos teoremas principais deste trabalho.

**Definição 1.15.** *Sejam  $E, M$  e  $F$  variedades diferenciáveis. Um fibrado com base  $M$ , fibra  $F$  e espaço total  $E$  é uma aplicação diferenciável  $\pi : E \rightarrow M$  tal que existe uma cobertura aberta  $U_i$  de  $M$  e difeomorfismos  $\Phi : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  satisfazendo  $\pi \circ \Phi_i(x, y) = x$ .*

**Definição 1.16.** *Uma seção de  $E$  é uma aplicação  $t : B \rightarrow E$ , tal que  $\pi \circ t = \text{Id}$ . Um campo de vetores em  $M$  é uma seção de  $TM$ .*

**Exemplo 1.4.** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana de dimensão  $m$  e  $N \subset M$  uma subvariedade de dimensão  $n$ . Denotemos*

$$T_p N^\perp = \{v \in T_p N : \langle v, u \rangle_p = 0, u \in T_p N\}.$$

*Definamos  $V(N) = \{(p, v_p) : p \in N, v_p \in T_p N^\perp\}$ , temos que  $(V(N), \pi, N, \mathbb{R}^{m-n})$  é um fibrado vetorial, chamado fibrado normal.*

**Definição 1.17.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma distribuição  $E$   $k$ -dimensional em  $M$  é uma aplicação que a cada  $x \in M$  associa um subespaço de dimensão  $k$ ,  $E(x) \subset T_x M$ , do espaço tangente a  $M$  em  $x$ . Uma distribuição  $E$  em  $M$  é dita diferenciável em  $x \in M$  se existem campos de vetores diferenciáveis  $X_1, \dots, X_k$  definidos em uma vizinhança de  $x$  que são:*

1. tangentes a  $E$ , e
2.  $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$  gera  $E(x)$ .

*Uma distribuição é dita diferenciável em  $M$  se o for em todo  $x \in M$ .*

**Teorema 1.6.** *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua. Para  $\varepsilon > 0$  existe uma aplicação suave  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que para todo  $x \in M$   $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U_p$  de  $p$  tal que  $|f(p) - f(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in U_p$ . Seja  $\{V_\alpha\}$  um atlas adequado refinando  $\{U_p\}$  e  $\rho_\alpha$  uma partição da unidade associada. Para cada  $V_\alpha$  escolhamos  $U_p \supset V_\alpha$  e definimos  $g_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g_\alpha = f(p)$  em  $U_p$ , notemos que  $|g_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in V_\alpha$ . Agora, seja  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $g = \sum_\alpha \rho_\alpha g_\alpha$ ,  $g$  é uma função suave em  $M$ , além disso, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| \sum_\alpha \rho_\alpha(x) f(x) - \sum_\alpha \rho_\alpha(x) g_\alpha(x) \right| \\ &\leq \sum_\alpha \rho_\alpha(x) |f(x) - g_\alpha(x)| < \sum_\alpha \rho_\alpha \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.7.** *Seja  $s : M \rightarrow E$  uma seção contínua de um fibrado vetorial, para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma seção suave  $t : M \rightarrow E$  tal que  $|s(p) - t(p)| < \varepsilon$  para todo  $p \in M$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.6 o resultado é válido se o fibrado é trivial. Para o caso geral, escolhamos um atlas adequado  $\{U_\alpha\}$  em  $M$  tal que o fibrado é trivial em cada  $U_\alpha$ . Para cada  $\alpha$  existe uma seção  $t_\alpha$  sobre  $U_\alpha$ ,  $\varepsilon$ -próxima de  $s|_{U_\alpha}$ , colando todas essas seções, usando partição da unidade definimos  $t = \sum_\alpha \rho_\alpha t_\alpha$ . □

**Corolário 1.4.** *Qualquer distribuição  $k$ -dimensional diferenciável  $E$ , admite uma aproximação suave.*

*Demonstração.* seja  $\varepsilon > 0$ , dado que  $E$  é uma distribuição contínua, existem  $k$  campos de vetores contínuos  $X_1, X_2, \dots, X_k$  tais que para cada  $p \in M$ , os vetores  $X_1(p), X_2(p), \dots, X_k(p)$  geram o subespaço de  $T_p M$ ,  $E(p)$ .

Para cada  $i = 1, 2, \dots, k$  consideremos

$$\begin{aligned} s_i : M &\rightarrow TM \\ x &\mapsto (x, X_i(x)). \end{aligned}$$

Notemos que para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $s_i$  é uma seção contínua, logo pelo Teorema 1.7 existe uma seção suave  $t_i(x) = (x, \tilde{X}_i(x))$  tal que  $|t_i(x) - s_i(x)| < \varepsilon$ , isto implica  $|\tilde{X}_i(x) - X_i(x)| < \varepsilon$ . Consideremos  $N$  a distribuição dada pelos campos de vetores  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{n-k}$ , segue então que  $N$  é uma aproximação suave da distribuição  $E$ . □

### 1.3.4 Folheações

Nesta seção discutiremos brevemente elementos de teoria de folheações, nós vamos a usar um tipo especial de folheações que são as dadas por um difeomorfismo hiperbólico, chamadas de folheação estável e instável. Procuramos centrar nossa atenção nos itens que serão usados neste trabalho, pelo qual, serão omitidos alguns resultados importantes sobre teoria de folheações.

**Definição 1.18.** *Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$ . Uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$ , de dimensão  $k$  e de classe  $C^r$ , é um atlas maximal onde cada carta local  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^r$  e as mudanças de coordenadas  $h_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  é da forma*

$$h_{ij}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Dado  $p \in M$ , uma placa em  $p$  é um conjunto da forma  $\alpha_p = \varphi^{-1}(\{(x, c) : x \in \mathbb{R}^k\})$ , com  $c$  fixo em  $\mathbb{R}^{n-k}$  e  $p \in \alpha_p$ . A folha de  $p$ ,  $F_p \in \mathcal{F}$ , é a união conexa maximal de placas a qual contem  $\alpha_p$ .

**Exemplo 1.5.** *O exemplo trivial é a folheação do espaço  $\mathbb{R}^n$  dada pela carta folheada  $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .*

**Exemplo 1.6.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma submersão de classe  $C^r$ , os conjuntos  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in N$  são folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$*

$$\mathcal{F} = \{f^{-1}(c) : c \in N\} \text{ é uma folheação.}$$

Uma vez que nosso objetivo é estudar a continuidade absoluta de uma aplicação chamada aplicação de holonomia, definida em subconjuntos transversais, daremos de forma breve a definição de transversalidade e a construção da holonomia.

**Definição 1.19.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de uma variedade  $M$ . Uma variedade transversal é uma subvariedade  $T$  de  $M$  tal que, para todo  $x \in T$ , temos  $T_x T + E_x = T_x M$  onde  $E_x = TF_x$ , diremos que  $T$  é uma seção transversal de  $\mathcal{F}$ .*

**Observação 1.1.** *As seções transversais sempre existem, de fato, seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $M$ ,  $p \in M$  e  $(U, \varphi)$  uma carta local contendo  $p$  tal que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , definamos  $T = \varphi^{-1}(\{c\} \times U_2)$  é uma seção transversal de  $\mathcal{F}$*

Seja  $F$  uma folha de  $\mathcal{F}$  e  $p, q \in F$  fixemos  $T_0$  e  $T_1$  transversais a  $\mathcal{F}$  tais que  $p \in T_0$  e  $q \in T_1$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$  uma curva tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ . Queremos definir a transformação das folhas de  $\mathcal{F}$ , que leva  $T_0$  em  $T_1$  sobre  $\gamma$ . Consideremos  $(U_i)_{i=0}^m$  abertos (domínios de cartas locais) tais que

1.  $\gamma([0, 1]) \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$ ;

2. se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  então  $U_i \cup U_j \subset V$  onde  $V$  é o domínio de alguma carta local.

Seja  $\{t_i\}$  uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$ , tal que  $\gamma(t_i) \in U_{i-1} \cap U_i$ , para  $\gamma(t_i)$ , neste caso dizemos que  $(U_i)_{i=0}^m$  é uma *cadeia subordinada a  $\gamma$* . Para cada  $0 < i < m + 1$  fixemos uma seção transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $D(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$  homeomorfa a um disco  $(n - k)$ -dimensional, passando por  $\gamma(t_i)$ . Como  $U_i \cup U_{i+1} \subset V$  ( $V$  o domínio de uma carta trivializadora) existem abertos  $D'_i \subset D(t_i)$  tais que as placas passando por cada  $D_i$  intersectam  $D(t_{i+1})$  em um único ponto. Isto define uma função  $C^r$ ,  $f_i : D_i \rightarrow D(t_{i+1})$ ,  $f_i(x)$  é a placa de  $x$  em  $V$  intersectada com  $D(t_{i+1})$ . Chamemos de  $D(0) = T_0$  e  $D(1) = T_1$  definamos

$$f_\gamma = f_k \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$$

$f_\gamma$  está definida em um aberto de  $T_0$  e é de classe  $C^r$ . Chamamos  $f_\gamma$  de holonomia.

## 2 Dinâmica hiperbólica local

Tendo em vista que estamos interessados em estudar as folheações estáveis e instáveis associadas a um difeomorfismo de Anosov, neste capítulo introduzimos e analisamos a definição de conjunto hiperbólico e conseqüentemente de difeomorfismo de Anosov, na sequência, daremos a prova do importante Teorema da Variedade Estável e Instável do qual obteremos as propriedades das famílias de subvariedades que compõem as folheações.

A prova do Teorema da Variedade Estável e Instável será feita usando o Teorema de Hadamard-Perron, que vamos apresentar na primeira parte deste capítulo. Nas provas dos teoremas deste capítulo formalizamos o conceito de cones invariantes e apresentamos um método que desempenha um papel central na teoria de sistemas dinâmicos hiperbólicos como é o fato de estabelecer o cenário para o uso sistemático do Princípio de Contração de Banach num espaço funcional propriamente construído.

### 2.1 Variedades estáveis e instáveis

#### 2.1.1 Pontos fixos hiperbólicos

**Definição 2.1.** *Seja  $f : U \subset M \rightarrow M$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  e  $p \in U$  um ponto fixo de  $f$ , dizemos que  $p$  é um ponto fixo hiperbólico de  $f$  se a sua derivada  $D_p f : T_p M \rightarrow T_p M$  for uma aplicação linear hiperbólica (ver Definição 1.3).*

**Definição 2.2.** *Diremos que  $p \in M$  é um ponto periódico hiperbólico de período  $n$  para  $f$  se  $D_p f^n : T_p M \rightarrow T_p M$  for uma aplicação hiperbólica. Neste caso a órbita de  $p$  é dita órbita periódica hiperbólica.*

Note que  $p$  é um ponto periódico hiperbólico se, e somente se, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $p$  é um ponto fixo hiperbólico para  $f^n$ .

**Definição 2.3.** *Sejam  $\lambda < \mu$ . Dizemos que a sequência de operadores lineares invertíveis  $L_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$  admite uma  $(\lambda, \mu)$ -decomposição, se existe uma decomposição de  $\mathbb{R}^n = E_m^+ \oplus E_m^-$  tal que  $L_m E_m^\pm = E_{m+1}^\pm$  e*

$$\|L_m|_{E_m^-}\| \leq \lambda, \text{ quad } \|L_m^{-1}|_{E_m^+}\| \leq \mu^{-1}.$$

*Diremos que  $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  admite uma decomposição exponencial se admite uma  $(\lambda, \mu)$ -decomposição para alguns  $\lambda, \mu$  com  $\lambda > 1$  e  $\dim E_m^- \geq 1$  ou  $\mu > 1$  e  $\dim E_m^+ \geq 1$ . Chamaremos  $\{L_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de hiperbólico (ou uniformemente hiperbólico) se admite uma decomposição exponencial.*

**Lema 2.1** (Lema de extensão). *Seja  $U$  uma vizinhança aberta e limitada de  $0 \in \mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo local de classe  $C^1$ , com  $f(0) = 0$ . Para  $\varepsilon > 0$  existem  $\delta > 0$  e um difeomorfismo local  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\bar{f} - Df(0)\|_{C^1} < \varepsilon$  e  $\bar{f} = f$  em  $B(0, \delta)$ .*

*Demonstração.* Escrevemos  $f(x) = Df(0) \cdot x + \phi(x)$ , note que  $\phi(0) = 0$  e  $D\phi(0) = 0$ . Fixemos uma função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\alpha = 1$  em  $B(0, 1)$  e  $\alpha = 0$  fora de  $B(0, 2)$ . Note que  $\|D\alpha\| \geq 1$ . Seja  $C = \|D\alpha\|$ , dado que  $\phi$  é contínua podemos tomar  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que  $B(0, 2\delta) \subset U$  e

$$\|D\phi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{4C} \quad \text{e} \quad \|\phi(x)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in B(0, 2\delta)$$

Definamos  $\bar{f}(x) = Df(0) \cdot x + \alpha\left(\frac{|x|}{\delta}\right)\phi(x)$ , note que  $\bar{f}$  é de classe  $C^1$ . Com  $\bar{f}$  definida dessa forma temos que

$$\|\bar{f}(x) - Df(0) \cdot x\| = \left\| \alpha\left(\frac{|x|}{\delta}\right)\phi(x) \right\| \leq \sup\{\|\phi(x)\| : x \in B(0, 1)\} < \varepsilon,$$

logo para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\bar{f}(x) - Df(0) \cdot x\| \leq \varepsilon$ , assim  $\|\bar{f} - Df(0)\| \leq \varepsilon$ . Para concluir a prova falta mostrar que  $\|D(\bar{f} - Df(0))(x)\| < \varepsilon$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , de fato, dividimos esta prova em três partes

1. Se  $|x| < \delta$  então  $\bar{f}(x) - Df(0) \cdot x = \alpha\left(\frac{|x|}{\delta}\right)\phi(x) = \phi(x)$ , logo

$$\|D(\bar{f} - Df(0))(x)\| = \|D\phi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{4C} < \varepsilon;$$

2. se  $|x| > 2\delta$  então  $\bar{f}(x) - Df(0) \cdot x = 0$ ;

3.  $\delta \leq |x| \leq 2\delta$  pelo teorema do valor médio temos

$$\|\phi(x)\| = \|\phi(x) - \phi(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4C}\|x\| \leq \frac{\varepsilon\delta}{2C}.$$

De 1, 2, e 3 segue que

$$\|D(\bar{f} - Df(0))(x)\| \leq \left\| \alpha\left(\frac{|x|}{\delta}\right) D\phi(x) \right\| + \left\| \frac{1}{\delta} D\alpha\left(\frac{|x|}{\delta}\right) \cdot \phi(x) \right\| < \varepsilon,$$

isto implica que  $\|\bar{f} - Df(0)\|_{C^1} \leq \varepsilon$ . Concluimos, portanto, que  $\bar{f}$  satisfaz as condições do Lema.  $\square$

### 2.1.2 Teorema de Hadamard-Perron

Nesta seção apresentaremos, com demonstração, o que pode ser considerado o teorema base da dinâmica hiperbólica, a saber o Teorema de Hadamard-Perron. A demonstração de tal resultado é longa porém bastante instrutiva e será fortemente utilizada posteriormente.

**Teorema 2.1** (Teorema de Hadamard-Perron). *Sejam  $\lambda < \mu, r \geq 1$  e para cada  $m \in \mathbb{Z}$  seja  $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^r$  tal que para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$*

$$f_m(x, y) = (A_m + \alpha_m(x, y), B_m y + \beta_m(x, y)),$$

onde  $A_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $B_m : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  são aplicações lineares com  $\|A_m^{-1}\| \leq \mu^{-1}, \|B_m\| \leq \lambda$  e  $\alpha_m(0) = 0, \beta_m(0) = 0$ . Então, para  $0 < \gamma < \{1, \sqrt{\mu/\lambda} - 1\}$ ,

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{(1 + \gamma)^2}, \frac{\mu - (1 + \gamma)^2 \lambda}{(1 + \gamma)(\gamma^2 + 2\gamma + 2)} \right\} \quad (2.1)$$

se  $\|\alpha_m\|_{C^1} < \delta$  e  $\|\beta_m\|_{C^1} < \delta$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , existem:

1. Uma única família  $\{W_m^+\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de variedades  $C^1$   $k$ -dimensionais e

$$W_m^+ = \{(x, \varphi_m^+(x)) : x \in \mathbb{R}^k\} = \text{graph} \varphi_m^+$$

2. Uma única família  $\{W_m^-\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de variedades  $C^1$   $(n - k)$ -dimensionais e

$$W_m^- = \{(\varphi_m^-(y), y) : y \in \mathbb{R}^{n-k}\} = \text{graph} \varphi_m^-$$

Onde  $\varphi_m^+ : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \varphi_m^- : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k, \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|D\varphi_m^\pm\| < \gamma$  e valem:

- i.  $f_m(W_m^+) = W_{m+1}^+, f_m(W_m^-) = W_{m+1}^-$
- ii.  $\|f_m(z)\| < \lambda' \|z\|$  para  $z \in W_m^-$  e  $\|f_{m-1}^{-1}(z)\| < \mu' \|z\|$  para  $z \in W_m^+$   
onde  $\lambda' := (1 + \gamma)(\lambda + \delta(1 + \gamma)) < \mu/(1 + \gamma) - \delta =: \mu'$
- iii. Seja  $\lambda' < \nu < \mu'$ . Se  $\|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(z)\| < C\nu^L \|z\|$  para  $L$  grande e algum  $C > 0$  então  $z \in W_m^-$ ; analogamente, se  $\|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(z)\| < C\nu^{-L} \|z\|$  para  $L$  grande e algum  $C > 0$  então  $z \in W_m^+$ .

Finalmente, no caso hiperbólico  $\lambda < 1 < \mu$  as famílias  $\{W_m^+\}_{m \in \mathbb{Z}}$  e  $\{W_m^-\}_{m \in \mathbb{Z}}$  são variedades  $C^r$ .

A prova deste Teorema será dividida em 5 passos.

**Passo 1:** Construção de cones invariantes.

**Definição 2.4.** O  $\gamma$ -cone horizontal em  $p \in \mathbb{R}^n$  é definido por

$$H_p^\gamma := \{(u, v) \in T_p \mathbb{R}^n : \|v\| \leq \gamma \|u\|\}$$

o  $\gamma$ -cone vertical em  $p$  é

$$V_p^\gamma := \{(u, v) \in T_p \mathbb{R}^n : \|u\| \leq \gamma \|v\|\}.$$

Em geral, o cone  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  é definido como a imagem de um cone horizontal ou vertical por uma aplicação linear.

**Exemplo 2.1.** Com  $n = 2$  o  $\gamma$ -cone horizontal é o conjunto de todos os pontos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $|x_2| \leq \gamma|x_1|$ . Note que o fecho do complemento do  $\gamma$ -cone horizontal é o  $1/\gamma$ -cone vertical.

Chamaremos de *campo de cones*  $K$ , uma coleção de cones  $K_p$  definidos em todo ponto de um conjunto dado. Um difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  age sobre um campo de cones  $K$  da seguinte forma

$$(f_*K)_p = Df_{f^{-1}(p)}(K_{f^{-1}(p)}).$$

Uma *família de cones* é uma sequência de campos de cones. A sequência de difeomorfismos  $f = \{f_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  age numa família de cones  $K_{p,m}$  por:

$$(f_*K)_{p,m} = (Df_{m-1})_{f_{m-1}^{-1}(p)}(K_{f_{m-1}^{-1}(p),m-1}).$$

Dizemos que uma família de cones  $K$  é (*estritamente*) *invariante* se

$$(f_*K)_p \subset \text{int}(K_{p,m}) \cup \{0\}.$$

Consideramos a ação de  $f = \{f_m\}$  satisfazendo as hipóteses do Teorema de Hadamard-Perron agindo nas famílias de cones horizontais e verticais, isto é, para  $p \in \mathbb{R}^n$  os cones  $H_p^\gamma$  e  $V_p^\gamma$  respectivamente.

**Lema 2.2.** Se  $\delta < \frac{(\mu - \lambda)\gamma}{\gamma^2 + 2\gamma + 1}$  então

$$(Df_m)_p(H_p^\gamma) \subset \text{int}H_{f_m(p)}^\gamma \cup \{0\} \quad e \quad (Df_m)_p^{-1}(V_{f_m(p)}^\gamma) \subset \text{int}V_p^\gamma \cup \{0\}.$$

*Demonstração.* Se  $(u, v) \in H_p^\gamma$ , pela definição de  $H_p^\gamma$ ,  $\|v\| \leq \gamma\|u\|$ . Se  $(u, v) = (0, 0)$  o resultado é imediato. Suponhamos  $(u, v) \neq (0, 0)$  e consideremos

$$(u', v') = (Df_m)_p(u, v) = (A_m u + (D\alpha_m)_p(u, v), B_m v + (D\beta_m)_p(u, v)),$$

então,

$$\begin{aligned} \|v'\| &= \|B_m v + (D\beta_m)_p(u, v)\| \leq \|B_m\|\|v\| + \|(D\beta_m)_p(u, v)\| \\ &< \lambda\|v\| + \delta(1 + \gamma)\|u\| < (\lambda\gamma + \delta(1 + \gamma))\|u\|. \end{aligned}$$

Também,

$$\|u'\| = \|A_m u + (D\alpha_m)_p(u, v)\| \geq \|A_m\|\|u\| - \|(D\alpha_m)_p(u, v)\| \geq \mu\|u\| - \delta\|(u, v)\|$$

como  $\|(u, v)\| \leq \|u\| + \|v\| \leq (1 + \gamma)\|u\|$ , obtemos que

$$\|u'\| > (\mu - \delta(1 + \gamma))\|u\| \tag{2.2}$$

Como  $\delta < \frac{(\mu - \lambda)\gamma}{\gamma^2 + 2\gamma + 1}$ , então  $\delta(1 + \gamma)^2 < \gamma(\mu - \lambda)$ , o que implica

$$\lambda\gamma + \delta(1 + \gamma) < \gamma(\mu - \delta(1 + \gamma)) \quad (2.3)$$

portanto,

$$\|v'\| < (\lambda\gamma + \delta(1 + \gamma))\|u\| < \gamma(\mu - \delta(1 + \gamma))\|u\| \leq \gamma\|u'\|.$$

Isto é,  $(u', v') \in \text{int}H_{f_m(p)}^\gamma$ . Desta forma concluímos de (2.1.2) e (2.3) que os cones horizontais são invariantes, isto é,  $(Df_m)_p(H_p^\gamma) \subset \text{int}H_{f_m(p)}^\gamma \cup \{0\}$ .

Mostrar que  $(Df_m)_p^{-1}(V_{f_m(p)}^\gamma) \subset \text{int}V_p^\gamma \cup \{0\}$  é equivalente a mostrar que  $(V_{f_m(p)}^\gamma) \subset (Df_m)_p(\text{int}V_p^\gamma \cup \{0\}) = \text{int}(Df_m)_p(V_p^\gamma) \cup \{0\}$  ou equivalentemente  $(Df_m)_p(H_p^{1/\gamma}) \subset \text{int}H_{f_m(p)}^{1/\gamma} \cup \{0\}$ , mas isto segue substituindo  $\gamma$  por  $1/\gamma$  na estimativa anterior.  $\square$

**Lema 2.3.**

$$\begin{aligned} \|(Df_m)_p(u, v)\| &> \left(\frac{\mu}{1 + \gamma} - \delta\right)\|(u, v)\| \text{ se } (u, v) \in H_p^\gamma \text{ e} \\ \|(Df_m)_p(u, v)\| &< (1 + \gamma)(\lambda + \delta)\|(u, v)\| \text{ se } (u, v) \in \tilde{V}_p^\gamma; \end{aligned}$$

onde  $\tilde{V}^\gamma := f_*^{-1}V^\gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $(u, v) \in H_p^\gamma$ , com a mesma notação do Lema 2.2 temos que:

$$\begin{aligned} \|(u', v')\| &\geq \|u'\| > (\mu - \delta(1 + \gamma))\|u\| \\ &\geq \left(\frac{\mu}{1 + \gamma} - \delta\right) (\|u\| + \|v\|) \\ &\geq \left(\frac{\mu}{1 + \gamma} - \delta\right) \|(u, v)\|. \end{aligned}$$

Se  $(u, v) \in \tilde{V}_p^\gamma$ , então

$$\begin{aligned} \|(u', v')\| &\leq \|u'\| + \|v'\| \leq (1 + \gamma)\|v'\| < (1 + \gamma) [\lambda\|v\| + \delta\|(u, v)\|] \\ &\leq (1 + \gamma)(\lambda + \delta)\|(u, v)\|. \end{aligned}$$

$\square$

**Passo 2:** Agora veremos a relação entre a existência de sequências invariantes de cones, e uma decomposição exponencial de uma sequência de aplicações lineares. As conclusões dos lemas anteriores aplicados às órbitas, tornarão o resultado desta etapa aplicável ao nosso problema.

**Proposição 2.1.** *Sejam  $\lambda' < \mu'$  e  $\gamma_m, \gamma'_m > 0$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), e  $L_m : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  uma sequência de aplicações lineares tais que*

1.  $L_m H^{\gamma_m} \subset \text{int} H^{\gamma_{m+1}} \cup \{0\}$
2.  $L_m^{-1} V^{\gamma'_{m+1}} \subset \text{int} V^{\gamma'_m} \cup \{0\}$
3.  $\|L_m(u, v)\| > \mu' \| (u, v) \|$  para  $(u, v) \in H^{\gamma_m}$
4.  $\|L_m(u, v)\| < \lambda' \| (u, v) \|$  para  $(u, v) \in L_m^{-1} V^{\gamma_{m+1}}$

então

$$E_m^+ := \bigcap_{i=0}^{\infty} L_{m-1} \circ L_{m-2} \circ \cdots \circ L_{m-i} H^{\gamma_{m-i}}$$

é um subespaço  $k$ -dimensional contido em  $H^{\gamma_m}$  e

$$E_m^- := \bigcap_{i=0}^{\infty} L_m^{-1} \circ L_{m+1}^{-1} \circ \cdots \circ L_{m+i}^{-1} V^{\gamma'_{m+i+1}}$$

é um subespaço  $(n - k)$ -dimensional contido em  $V^{\gamma'_m}$ .

*Demonstração.* Note que  $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset H^\gamma$  para todo  $\gamma$ , então para cada  $j \in \mathbb{N}$

$$S_j := L_{m-1} \circ L_{m-2} \circ \cdots \circ L_{m-j} (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset L_{m-1} \circ L_{m-2} \circ \cdots \circ L_{m-j} (H_{m-j}^\gamma) =: T_j.$$

Para cada  $j \in \mathbb{N}$  seja  $\{v_1^j, v_2^j, \dots, v_k^j\}$  uma base ortonormal ordenada para  $S_j$ , consideremos as sequências  $\{v_i^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, k$  (as sequências dadas pelas coordenadas). Pela condição (1) temos  $S_i \subset T_j$ , para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ , e a interseção de  $T_j$  com a esfera unitária é compacta, então as sequências de coordenadas tem subsequências que convergem em  $T_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . De forma similar, se tomarmos uma sequência de vetores definida em um conjunto de coeficientes fixos, tal sequência também convergirá em  $T_j$ .

Seja  $S$  o espaço gerado pelos limites das sequências dos básicos, então  $S$  está contido em  $T_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , portanto, na interseção deles.

Mostraremos que  $S = E_m^+$ , note que  $S \subset H^{\gamma_m}$ . Seja  $(u, v) \in E_m^+$ , então dado que  $S \subset H^{\gamma_m}$  é transversal a  $0 \times \mathbb{R}^{n-k}$  podemos escrever  $(u, v) = (u, v') + (0, v'')$  com  $(u, v) \in S$  e  $(0, v'') \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Sejam

$$\begin{aligned} (u_j, v_j) &:= L_{m-j}^{-1} \circ \cdots \circ L_{m-1}^{-1} (u, v), \\ (u'_j, v'_j) &:= L_{m-j}^{-1} \circ \cdots \circ L_{m-1}^{-1} (u, v'), \\ (u''_j, v''_j) &:= L_{m-j}^{-1} \circ \cdots \circ L_{m-1}^{-1} (0, v''). \end{aligned}$$

Então  $(u, v) \in E_m^+$  pela definição de  $E_m^+$  implica que  $(u_j, v_j) \in H^{\gamma_{m-j}}$  e pela condição (3) como  $(u_j, v_j) \in H^{\gamma_{m-j}}$  então  $\|(u_j, v_j)\| \leq \mu^{-j} \|(u, v)\|$  e  $\|(u'_j, v'_j)\| \leq \mu^{-j} \|(u, v')\|$ . Dado que

$(u_j'', v_j'') \in V^{\gamma' m-j}$ , por (4) temos que

$$\begin{aligned} \|v''\| &\leq (\lambda')^j \|(u_j'', v_j'')\| \leq (\lambda')^j (\|(u_j, v_j)\| + \|(u_j', v_j')\|) \\ &\leq \left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^j (\|(u, v)\| + \|(u, v')\|) \end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ , daí  $\|v''\| = 0$ , isto é,  $v'' = 0$ . Assim,  $(u, v) = (u, v') \in S$ . O argumento para  $E_m^-$  é similar, usando a família  $\{L_m^{-1}\}$  no lugar de  $\{L_m\}$ .  $\square$

**Observação 2.1.** Note que  $E_m^+$  e  $E_m^-$  são as únicas sequências invariantes de subespaços dentro dos cones  $H^{\gamma m}$  e  $V^{\gamma' m}$  respectivamente.

**Corolário 2.1.** Nas mesmas hipóteses da Proposição 2.1 e  $\lambda' < 1 < \mu'$  então  $\{L_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  é uma família de aplicações hiperbólicas as quais admitem uma  $(\lambda', \mu')$ -decomposição.

**Corolário 2.2.** Se  $\gamma < \sqrt{(\mu/\lambda) - 1}$  e

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{(1 + \gamma)^2}, \frac{\mu - (1 + \gamma)^2 \lambda}{(1 + \gamma)(\gamma + 2)} \right\}$$

então

$$(E_p^+)_m = \bigcap_{i=0}^{\infty} ((f_*)^i H^\gamma)_{p,m} = \bigcap_{i=0}^{\infty} ((f_*(f_*(\dots(f_*(H^\gamma)\dots)))_{p,m}$$

é um subespaço  $k$ -dimensional contido em  $H_p^\gamma$ ,

$$(Df_m)_p(E_p^+)_m = (E_{f_m(p)}^+)_{m+1}$$

e

$$\|(Df_m)_p(\xi)\| \geq \left( \frac{\mu}{1 + \gamma} - \delta \right) \|\xi\|, \text{ para todo } \xi \in (E_p^+)_m.$$

Da mesma forma  $(E_p^-)_m = \bigcap_{i=0}^{\infty} ((f_*)^{-1})^i V^{\gamma}$  é um subespaço  $(n - k)$ -dimensional contido em  $V_p^\gamma$ ,

$$(Df_m)_p(E_p^-)_m = (E_{f_m(p)}^-)_{m+1}$$

e para todo  $\xi \in (E_p^-)_m$

$$\|(Df_m)_p(\xi)\| \geq (1 + \gamma)(\lambda + \delta) \|\xi\|.$$

**Lema 2.4.** Para cada  $m \in \mathbb{Z}$  os subespaços  $(E_p^+)_m$  e  $(E_p^-)_m$  dependem continuamente de  $p$ .

*Demonstração.* Temos que os vetores em  $v \in (E_p^-)_m$  são caracterizados por

$$\|(Df_{m+j})(Df_{m+j-1}) \cdots (Df_m)_p v\| \leq (\lambda')^{j+1} \|v\| \quad j \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

Seja  $\{p_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  uma sequência tal que  $p_l \rightarrow p$ , tomemos uma base ortonormal  $\{\xi_1^l, \xi_2^l, \dots, \xi_k^l\}$  de  $(E_{p_l}^-)_m$ , sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \xi_i^l = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Dado que para cada  $i \in \mathbb{N}$  fixo, os vetores  $\xi_i^l$  satisfaz (2.4) para todo  $l \in \mathbb{N}$ , pela continuidade de cada  $Df_m$ , temos que  $\xi_i$  satisfaz (2.4), portanto,  $\xi_i \in (E_p^-)_m$ . Uma vez que  $\dim(E_p^-)_m$  não depende de  $p$ , segue que  $\lim_{l \rightarrow \infty} (E_{p_l}^-)_m = (E_p^-)_m$ .

Note que a caracterização dos vectores  $w \in (E_p^+)_m$  é dada por

$$\|(Df_{m+j})(Df_{m+j-1}) \cdots (Df_m)_p v\| \geq (\mu')^{j+1} \|v\| \quad j \in \mathbb{N}$$

Com um argumento similar ao anterior concluímos que subespaços  $(E_p^-)_m$  dependem continuamente de  $p$ . □

**Passo 3:** Obter gráficos invariantes, isto é, uma família  $\{\varphi_m^+ : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de funções Lipschitz tal que  $f_m(\text{graph} \varphi_m^+) = \text{graph} \varphi_{m+1}^+$  e  $\varphi_m^+(0) = 0$ .

Seja  $C_\gamma(\mathbb{R}^k)$  o conjunto de funções  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  que são  $\gamma$ -Lipschitz e  $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$  o subconjunto de  $\varphi \in C_\gamma(\mathbb{R}^k)$  tais que  $\varphi(0) = 0$ .

**Lema 2.5.** *Suponha que  $\gamma < \sqrt{(\mu/\lambda) - 1}$ ,*

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{(1 + \gamma)^2}, \frac{\mu - (1 + \gamma)^2 \lambda}{(1 + \gamma)(\gamma + 2)} \right\}$$

*Seja  $\varphi \in C_\gamma(\mathbb{R}^k)$  então  $f_m(\text{graph} \varphi) = \text{graph} \psi$  para algum  $\psi \in C_\gamma(\mathbb{R}^k)$ . O Lema vale também para  $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ .*

*Demonstração.* Dado  $(x, \varphi(x)) \in \text{graph} \varphi$ , então

$$f_m(x, \varphi(x)) = (A_m x + \alpha_m(x, \varphi(x)), B_m \varphi(x) + \beta_m(x, \varphi(x))).$$

Consideremos a função  $G_\varphi^m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  dada por

$$G_\varphi^m(x) = A_m x + \alpha_m(x, \varphi(x)).$$

Note que  $G_\varphi^m$  representa a primeira coordenada da imagem do conjunto  $\text{graph} \varphi$  pela aplicação  $f_m$ .

Para provar que  $f_m(\text{graph} \varphi)$  é o gráfico de uma função, mostraremos que  $G_\varphi^m$  é bijetora, isto é, para  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  devemos mostrar que existe um único ponto  $x \in \mathbb{R}^k$  tal que  $G_\varphi^m(x) = x_0$  ou equivalentemente

$$x = F(x) \text{ onde } F(x) = A_m^{-1} x_0 - A_m^{-1}(\alpha(x, \varphi(x))).$$

Afirmamos que  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma contração, de fato, sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\| &= \|A_m^{-1}(\alpha(x_1, \varphi(x_1))) - A_m^{-1}(\alpha(x_2, \varphi(x_2)))\| \\ &\leq \mu^{-1} \|\alpha_m\|_{C^1} (1 + \gamma) \|x_1 - x_2\| < \mu^{-1} \delta (1 + \gamma) \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Pela hipótese  $\mu^{-1} \delta (1 + \gamma) < 1$ . Logo pelo Princípio de Contração a função  $F$  tem um único ponto fixo, segue que  $G_\varphi^m$  é bijetora, portanto, existe  $\psi$  tal que  $f_m(\text{graph}\varphi) = \text{graph}\psi$ . Vejamos agora que  $\psi$  é  $\gamma$ -Lipschitz, sejam  $x'_1, x'_2 \in \mathbb{R}^k$ , suponhamos  $\psi(x'_1) = y'_1$ ,  $\psi(x'_2) = y'_2$  e tomemos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{graph}\varphi$  tais que para  $i = 1, 2$

$$(x'_i, y'_i) = f_m(x_i, y_i) = f_m(x_i, \varphi(x_i)) = (A_m x_i + \alpha_m(x_i, \varphi(x_i)), B_m \varphi(x_i) + \beta_m(x_i, \varphi(x_i))).$$

Então temos

$$\begin{aligned} \|y'_2 - y'_1\| &\leq \|B_m(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))\| + \|\beta_m(x_2, \varphi(x_2)) - \beta_m(x_1, \varphi(x_1))\| \\ &\leq \lambda \gamma \|x_2 - x_1\| + \delta (1 + \gamma) \|x_2 - x_1\| = (\lambda \gamma + \delta (1 + \gamma)) \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|x'_2 - x'_1\| &\geq \|A_m(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))\| + \|\alpha_m(x_2, \varphi(x_2)) - \alpha_m(x_1, \varphi(x_1))\| \\ &\geq \mu \|x_2 - x_1\| - \delta (1 + \gamma) \|x_2 - x_1\| = (\mu - \delta (1 + \gamma)) \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

destas duas desigualdades segue que

$$\|y'_2 - y'_1\| \leq \gamma' \|x'_2 - x'_1\|, \text{ onde } \gamma' := \frac{\lambda \gamma + \delta (1 + \gamma)}{\mu - \delta (1 + \gamma)},$$

pela condição para  $\delta$  na hipótese temos que  $\gamma' < \gamma$ , portanto,  $\psi$  é  $\gamma$ -Lipschitz; isto mostra que  $f_m$  age sobre o espaço  $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ . Para o caso  $\varphi \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$  o Lema 2.5 também é válido uma vez que  $f_m(0) = 0$ .  $\square$

Dado que eventualmente queremos aplicar o Princípio de Contração, introduzimos uma métrica no espaço  $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$  e mostraremos que a ação de  $f_m$  nesse espaço é uma contração. Seja

$$d(\varphi, \psi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\varphi(x) - \psi(x)\|}{\|x\|}, \varphi, \psi \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k) \right\}.$$

Como  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$  e as funções  $\varphi, \psi$  são Lipschitz esta métrica é bem definida. É fácil verificar que com essa métrica,  $(C_\gamma^0(\mathbb{R}^k), d)$  é um espaço métrico completo.

No seguinte Lema mostramos que a ação de  $f_m$  em  $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$  dada por

$$f_m(\text{graph}\varphi) = \text{graph}((f_m)_* \varphi)$$

é uma contração.

**Lema 2.6.**  $d((f_m)_*\varphi, (f_m)_*\psi) \leq \frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} d(\varphi, \psi)$  para  $\varphi, \psi \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ .

*Demonstração.* Sejam  $\varphi' = (f_m)_*\varphi$  e  $\psi' = (f_m)_*\psi$ . Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  arbitrário, usando a aplicação  $G_\varphi^m$  definida no Lema 2.5, temos

$$\begin{aligned} \|(f_m)_*\varphi(x), (f_m)_*\psi(x)\| &= \|\varphi'(G_\varphi^m(x)) - \psi'(G_\varphi^m(x))\| \\ &\leq \|\varphi'(G_\varphi^m(x)) - \psi'(G_\psi^m(x))\| + \|\psi'(G_\psi^m(x)) - \psi'(G_\varphi^m(x))\| \\ &= \|B_m\varphi(x) + \beta_m(x, \varphi(x)) - B_m\psi(x) - \beta_m(x, \psi(x))\| + \|\psi'(G_\varphi^m(x)) - \psi'(G_\psi^m(x))\| \\ &\leq \|B_m\|\|\varphi(x) - \psi(x)\| + \|\beta_m(x, \varphi(x)) - \beta_m(x, \psi(x))\| + \gamma\|G_\varphi^m(x) - G_\psi^m(x)\| \\ &< \lambda\|\varphi(x) - \psi(x)\| + \delta\|\varphi(x) - \psi(x)\| + \gamma\|A_mx + \alpha_m(x, \psi(x)) - A_mx - \alpha(x, \varphi(x))\| \\ &< \lambda\|\varphi(x) - \psi(x)\| + \delta\|\varphi(x) - \psi(x)\| + \gamma\delta\|\varphi(x) - \psi(x)\| \\ &= (\lambda + \delta(1 + \gamma))\|\varphi(x) - \psi(x)\|. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|G_\varphi^m(x)\| &= \|A_mx + \alpha_m(x, \varphi(x))\| \geq \|A_mx\| - \|\alpha(x, \varphi(x))\| \\ &\geq \mu\|x\| - \delta(1 + \gamma)\|x\| = (\mu - \delta(1 + \gamma))\|x\|, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{\|(f_m)_*\varphi(G_\varphi^m(x)) - (f_m)_*\psi(G_\varphi^m(x))\|}{\|G_\varphi^m(x)\|} &\leq \frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} \frac{\|\varphi(x) - \psi(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} d(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Portanto, dado que  $G_\varphi^m$  é bijetora segue que

$$d((f_m)_*\varphi, (f_m)_*\psi) \leq \frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} d(\varphi, \psi) \text{ para } \varphi, \psi \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k).$$

Como  $\frac{\lambda + \delta(1 + \gamma)}{\mu - \delta(1 + \gamma)} < 1$ , a ação de  $f$  no espaço  $C_\delta^0(\mathbb{R}^k)$  é uma contração.  $\square$

Agora, denotemos por  $C_\gamma^0$  o espaço das famílias  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de funções em  $C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ . E definamos a ação de  $f = \{f_m\}$  no espaço  $C_\gamma^0$  dada por

$$\begin{aligned} f : C_\gamma^0 &\rightarrow C_\gamma^0 \\ \{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}} &\mapsto \{(f_m)_*\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

tal que  $\text{graph}((f_m)_*\varphi_m) = f_m(\text{graph}\varphi)$ . A função  $f$  é conhecida como a *transformação de gráfico*. Introduzimos em  $C_\gamma^0$  uma métrica que torna  $f$  uma contração

$$d(\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}, \{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}) := \sup_{m \in \mathbb{Z}} d(\varphi_m, \psi_m)$$

Pelo Princípio de Contração em espaço métrico,  $f$  tem um único ponto fixo, logo existe uma família invariante  $\{\varphi_m^+\}_{m \in \mathbb{Z}}$ .

$$W_m^+ = \{(x, \varphi_m^+(x)) : x \in \mathbb{R}^k\} = \text{graph} \varphi_m^+$$

Para construir  $\varphi_m^-$  procedemos com o mesmo argumento, usando as estimativas obtidas, substituindo  $\gamma$  por  $1/\gamma$  e mostrando que as aplicações  $f_m^{-1}$  agem na família de funções  $\gamma$ -Lipchitz  $\varphi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , e são contrações, pelo qual obtemos também

$$W_m^- = \{(\varphi_m^-(y), y) : y \in \mathbb{R}^{n-k}\} = \text{graph} \varphi_m^-$$

Neste ponto podemos provar o item (ii) do teorema, de fato, seja  $z = (x, \varphi(x)) \in W_m^+$ , temos que

$$\begin{aligned} \|f_m(z)\| &= \|f_m(x, \varphi_m^+(x))\| = \|A_m x + \alpha_m(x, \varphi_m^+(x)), B_m \varphi_m^+(x) + \beta_m(x, \varphi_m^+(x))\| \\ &\geq \|A_m x + \alpha_m(x, \varphi_m^+(x))\| > \mu \|x\| - \delta(1 + \gamma) \|x\| \\ &= \frac{\mu - \delta(1 + \gamma)}{1 + \gamma} (1 + \gamma) \|(x, \varphi_m^+(x))\| \\ &= \frac{\mu - \delta(1 + \gamma)}{1 + \gamma} \|(x, \varphi_m^+(x))\|. \end{aligned}$$

Agora,  $z = (\varphi^-(y), y) \in W_m^-$ , dado que  $f_m$  é uma função  $\gamma$ -Lipschitz, temos:

$$\begin{aligned} \|f_m(z)\| &= \|f_m(\varphi^-(y), y)\| = \|A_m \varphi^-(y) + \alpha_m(\varphi^-(y), y), B_m y + \beta_m(\varphi^-(y), y)\| \\ &\leq (1 + \gamma) \|B_m y + \beta_m(\varphi^-(y), y)\| \\ &< (1 + \gamma)(\lambda + \delta(1 + \gamma)) \|y\| \\ &\leq (1 + \gamma)(\lambda + \delta(1 + \gamma)) \|(\varphi^-(y), y)\|. \end{aligned}$$

**Passo 4:** Para provar que a família invariante de funções obtidas na etapa anterior consiste em funções diferenciáveis, introduzimos o conceito de conjunto tangente para um gráfico. Usando o resultado do passo 2 e a existência de uma única família de campos de planos invariantes contidas nos cones vamos mostrar que o conjunto tangente de cada um dos gráficos obtidos é um campo de planos contínuo, o que vai implicar que as gráficos são de classe  $C^1$ , a referência usada para este passo é [2].

**Definição 2.5.** *Seja  $\varphi \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^k$  definimos*

$$\Delta_y \varphi := \frac{(y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))}{\|(y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))\|}, \quad x \neq y$$

Assim,  $\Delta_y \varphi = u/\|u\|$  (veja Figura 2.1.2)

$t_x\varphi := \{v \in T_{(x, \varphi(x))}\mathbb{R}^n : \text{existe } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{x_n}\varphi = v\}$ . O conjunto tangente de  $\varphi$  em  $x$  é definido como:

$$\tau_{(x, \varphi(x))}\varphi := \bigcup_{v \in t_x\varphi} \mathbb{R}v; \text{ onde } \mathbb{R}v = \{av : a \in \mathbb{R}\}.$$

A união disjunta  $\tau\varphi := \bigcup_{x \in \mathbb{R}^k} \tau_{(x, \varphi(x))}\varphi$  é chamada de conjunto tangente de  $\varphi$ .

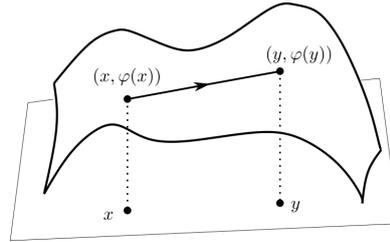


Figura 3 – O vetor  $u = (y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))$

**Lema 2.7.**  $\varphi \in C^0_\gamma(\mathbb{R}^k)$  é diferenciável em  $x$  se, e somente se,  $\tau_{(x, \varphi(x))}\varphi$  é um plano  $k$ -dimensional

*Demonstração.* Suponhamos que  $\varphi$  é diferenciável em  $x$ . Consideremos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto (y, \varphi(y)) \end{aligned}$$

Note que  $g$  é uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^k$ , logo podemos fazer:

$$\begin{aligned} Dg(x) \cdot h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))}{\|(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))\|} \frac{\|(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))\|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))}{\|(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))\|} \left\| \left( h, \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} \right) \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))}{\|(x + th, \varphi(x + th)) - (x, \varphi(x))\|} \|(h, \varphi'(x))\|. \end{aligned}$$

Portanto, o plano tangente a  $g$  no ponto  $x$  coincide com  $\tau_{(x, \varphi(x))}\varphi$ , mas pela definição de  $g$  temos que  $\tau_{(x, \varphi(x))}\varphi$  coincide com o espaço tangente ao gráfico de  $\varphi$  no ponto  $x$ , que tem dimensão  $k$ , logo  $\tau_{(x, \varphi(x))}\varphi$  tem dimensão  $k$ .

Suponhamos agora que  $\tau_{(x, \varphi(x))}\varphi$  tem dimensão  $k$ . Para cada  $v \in \mathbb{R}^k$ , o limite

$$C(x, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_{x+s_m v} \varphi \tag{2.5}$$

existe para qualquer sequência  $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $s_m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Mais ainda,  $C(x, v)$  é independente da sequência  $s_m$ . De fato, uma vez que cada vetor  $\Delta_{x+s_m v}$  tem norma 1, segue

da compacidade da esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$  que a sequência  $(\Delta_{x+s_m v} \varphi)_m$  tem subsequências convergentes. Mais ainda, dado que  $\tau_{(x, \varphi(x))} \varphi$  é um subespaço de dimensão  $k$ , para cada  $v$  existe um único vetor  $w = w_{x,v} \in E^-(x)$  tal que  $w \in \tau_{(x, \varphi(x))} \varphi$ . Isto implica que o limite em (2.5) existe e

$$C(x, v) = \frac{(v, w)}{\|(v, w)\|},$$

em outras palavras  $D_x \varphi \cdot v = w$  e a função  $\varphi$  é diferenciável em  $x$ .  $\square$

Note que se  $\Delta_{x_n} \varphi \rightarrow v$  com  $x_n \rightarrow x$ , então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_m(x_n, \varphi(x_n)) - f_m(x, \varphi(x))}{\|f_m(x_n, \varphi(x_n)) - f_m(x, \varphi(x))\|} = \frac{Df_m(x, \varphi(x)) \cdot v}{\|Df_m(x, \varphi(x)) \cdot v\|}.$$

Isto implica

$$(Df_m)_{(x, \varphi(x))} \tau_{(x, \varphi(x))} \varphi = \tau_{f_m(x, \varphi(x))} \psi, \quad (2.6)$$

onde  $f_m(\text{graph} \varphi) = \text{graph} \psi$ . Isto é, os conjuntos de planos tangentes são invariantes pela ação de  $Df$

Agora, vamos ver que a família invariante  $\varphi^+ = \{\varphi_m^+\}$ , obtida no Passo 3 está composta por funções diferenciais, de fato associada à família  $\varphi^+$  temos uma família de conjuntos tangentes  $\tau \varphi^+ := \{\tau \varphi_m^+\}$ , note que

$$\tau_{(x, \varphi_m^+(x))} \varphi_m^+ \subset H^\gamma \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Por outro lado, pela observação 2.1 e o Corolário 2.2 temos que

$$\begin{aligned} (Df_m)_p (E_p^s)_m &= (E_{f_m(p)}^s)_{m+1} \\ (Df_m)_p (E_p^u)_m &= (E_{f_m(p)}^u)_{m+1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em particular  $E_p^s$  e  $E_p^u$  são os maiores conjuntos contidos nos cones  $H^\gamma$  e  $V^\gamma$  respetivamente que satisfazem (2.8). Segue de (2.6) e (2.7) que

$$\tau_{(x, \varphi_m^+(x))} \varphi_m^+ \subset (E_p^s)_m$$

Dado que todo conjunto tangente  $\tau_{(x, \varphi_m^+(x))} \varphi_m^+$  projeta-se sobre  $\mathbb{R}^k$ , temos que  $\tau_{(x, \varphi_m^+(x))} \varphi_m^+ = (E_{(x, \varphi_m^+(x))}^+)_{m+1}$ , o que implica que  $\tau_{(x, \varphi_m^+(x))} \varphi_m^+$  tem dimensão  $k$ , pelo Lema 2.7 cada  $\varphi_m^+$  é diferenciável, mais ainda, pelo Lema 2.4, a função  $x \mapsto E_{(x, \varphi_m^+(x))}^+$  é contínua dado que é composição de funções contínuas. Portanto,  $W_m^+ = \{(x, \varphi_m^+(x)) : x \in \mathbb{R}^k\}$  é uma variedade de classe  $C^1$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

De forma análoga mostramos que  $W_m^-$  é variedade de classe  $C^1$ , concluindo assim a prova de (i).

Resta provar (iii). Observamos após a formulação do teorema que dado um ponto  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^n$  podemos construir as variedades  $(W_m^-)_p$  e  $(W_m^+)_p$  que contem  $p$ . Digamos

$$(W_m^-)_p = \text{graph}(\varphi_m^-)_p \text{ e } (W_m^+)_p = \text{graph}(\varphi_m^+)_p,$$

para algumas funções  $\gamma$ -Lipschitz,  $(\varphi_m^-)_p : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $(\varphi_m^+)_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , com propriedades análogas a (i) e (ii).

**Lema 2.8.** Para  $p, q \in \mathbb{R}^n$  a interseção  $(W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$  contém exatamente um ponto.

*Demonstração.* Se  $z = (x, y) \in (W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$ , então  $y = (\varphi_m^+)_p(x)$  e  $x = (\varphi_m^-)_q(y)$ , portanto  $x = (\varphi_m^-)_q((\varphi_m^+)_p(x))$ , o que implica que  $(x, (\varphi_m^+)_p(x)) \in (W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$ ; mas nos podemos assumir  $\gamma < 1$ , logo a aplicação  $(\varphi_m^-)_q(\varphi_m^+)_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma contração, portanto possui um único ponto fixo.  $\square$

Agora, suponhamos que  $p \notin (W_m^-)_0$ , pelo Lema 2.8 existe um único  $q \in (W_m^-)_0 \cap (W_m^+)_p$  usando (ii) para  $(W_m^-)_0$  e  $(W_m^+)_p$  temos

$$\begin{aligned} \|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(p)\| &\geq \|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(p) - f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(q)\| - \|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(q)\| \\ &\geq (\mu')^L \|p - q\| - (\lambda')^L \|q\| = (\mu')^L \left( \|p - q\| + \left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^L \|q\| \right), \end{aligned}$$

se  $\lambda' < \nu < \mu'$  e  $C \in \mathbb{R}$ , então sempre existe  $L$  suficientemente grande tal que  $\|f_{m+L-1} \circ \dots \circ f_m(p)\| > C\nu^L \|p\|$ . Seja  $q \in (W_m^+)_0 \cap (W_m^-)_p$

$$\begin{aligned} \|f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1}(p)\| &\geq \|f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1}(p) - f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1}(q)\| - \|f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1}(q)\| \\ &\geq (\lambda')^{-L} \|p - q\| - (\mu')^{-L} \|q\| = (\lambda')^{-L} \left( \|p - q\| + \left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^L \|q\| \right), \end{aligned}$$

logo para  $L$  suficientemente grande existe  $C > 0$  tal que  $\|f_{m-L}^{-1} \circ \dots \circ f_{m-1}^{-1}(p)\| > C\nu^{-L} \|p\|$ .

**Passo 5:** Para completar a demonstração do Teorema 2.1, vamos provar que se  $\mu \geq 1$ , então  $\{W_m^+\}_{m \in \mathbb{Z}}$  consiste em variedades tão suaves quanto o difeomorfismo.

De fato, note que podemos escrever o diferencial  $Df_m$  em forma de bloco:

$$\begin{pmatrix} A_m^{uu} & A_m^{su} \\ A_m^{us} & A_m^{ss} \end{pmatrix},$$

com  $A_m^{uu}$  matriz  $k \times k$ ,  $\|(A_m^{uu})^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu - \delta}$ ,  $A_m^{ss}$  uma matriz  $(n - k) \times (n - k)$  com  $\|A_m^{ss}\| \leq \lambda + \delta$  e  $\|A_m^{su}\| < \delta$ ,  $\|A_m^{us}\| < \delta$ . Pelas etapas anteriores podemos obter  $W_m^+$  tomando as funções suaves  $\varphi_m^0 \in C_\gamma^0(\mathbb{R}^k)$  com  $\varphi_m^0 = 0$  aplicando a aplicação do gráfico repetidamente obtemos a família  $\{\varphi_m^i\}$  para  $i \in \mathbb{N}$ , e tomando limite quando  $i \rightarrow \infty$ . Provaremos indutivamente que a  $(r + 1)$ -ésima derivada de  $\varphi_m^i$  converge quando  $i \rightarrow \infty$ , sempre que  $f$  seja  $C^{r+1}$ . Note que  $D\varphi_m^i$  é o gráfico de uma aplicação linear  $E_m^i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , ou equivalentemente, a imagem da aplicação

$\begin{pmatrix} I \\ E_m^i \end{pmatrix} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , note que a imagem de  $D\varphi_m^i$  por  $Df_m$  é a imagem da aplicação linear

$$\begin{pmatrix} A_m^{uu} & A_m^{su} \\ A_m^{us} & A_m^{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ E_m^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m^{uu} + A_m^{su} E_m^i \\ A_m^{us} + A_m^{ss} E_m^i \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Seja  $g_m^i := \left(G_{\varphi_{m-1}^i}^{m-1}\right)^{-1}$ , com  $G_{\varphi_m}^m$  como no Lema 2.5. Então a imagem de (2.9) coincide com a imagem de  $\begin{pmatrix} I \\ E_{m+1}^{i+1} \circ (g_{m+1}^i)^{-1} \end{pmatrix}$  que é igual a

$$\begin{pmatrix} A_m^{uu} + A_m^{su} E_m^i \\ E_{m+1}^{i+1} \circ (g_{m+1}^i)^{-1} (A_m^{uu} + A_m^{su} E_m^i) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$E_{m+1}^{i+1} \circ (g_{m+1}^i)^{-1} (A_m^{uu} + A_m^{su} E_m^i) = A_m^{us} + A_m^{ss} E_m^i.$$

Compondo com  $g_{m+1}^i$ , obtemos

$$E_{m+1}^{i+1} (A_m^{uu} \circ g_{m+1}^i + (A_m^{su} \circ g_{m+1}^i) (E_m^i \circ g_{m+1}^i)) = A_m^{us} + A_m^{ss} E_m^i.$$

Agora derivando  $r$ -vezes obtemos

$$\begin{aligned} & D^r E_{m+1}^{i+1} (\alpha_{m+1,i+1}^u)^{-1} + E_{m+1}^{i+1} (A_m^{su} \circ g_{m+1}^i) (D^r E_m^i \circ g_{m+1}^i) (Dg_{m+1}^i)^{\otimes r} \\ & = (A_m^{ss} \circ g_{m+1}^i) (D^r E_m^i \circ g_{m+1}^i) (Dg_{m+1}^i)^{\otimes r} + \xi_{m+1,i+1}^u (\alpha_{m+1,i+1}^u)^{-1}, \end{aligned}$$

onde  $\xi_{m+1,i+1}^u$  é um polinômio nas derivadas anteriores de  $E_{m+1}^{i+1}$  e  $E_m^i$  e

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1,i+1}^u & := [(A_m^{uu} \circ g_{m+1}^i) + (A_m^{su} \circ g_{m+1}^i) (E_m^i \circ g_{m+1}^i)]^{-1}, \\ \alpha_{m,i}^s & := (A_m^{ss} \circ g_m^{i-1}) - E_m^i (A_{m-1}^{su} \circ g_m^{i-1}), \\ (Dg_{m+1}^i)^{\otimes r} & := (Dg_{m+1}^i) (Dg_{m+1}^i) \cdots (Dg_{m+1}^i) \quad (r \text{ vezes } Dg_{m+1}^i), \end{aligned}$$

obtemos então,

$$\begin{aligned} D^r E_m^i & = \alpha_{m,i}^s (D^r E_{m-1}^{i-1} \circ g_m^{i-1}) (Dg_m^{i-1})^{\otimes r} \alpha_{m,i}^u + \xi_{m,i} \\ & = \alpha_{m,i}^s (\alpha_{m-1}^s \circ g_m^{i-1}) (D^r E_{m-2}^{i-2} \circ g_{m-1}^{i-2} \circ g_m^{i-1}) (Dg_{m-1}^{i-2})^{\otimes r} (\alpha_{m-1,i-1}^u \circ g_m^{i-1}) (Dg_m^{i-1})^{\otimes r} \alpha_{m,i}^u \\ & + \alpha_{m,i}^s (\xi_{m-1,i-1}^s \circ g_m^{i-1}) (Dg_m^{i-1})^{\otimes r} \alpha_{m,i}^u + \xi_{m,i}. \end{aligned}$$

Aplicando isto indutivamente obtemos uma expressão para  $D^r E_m^i$  com um termo principal que envolve  $D^r E_{m-l}^0$  com o produto dos  $i$  termos  $\alpha_{m-l,i-l}^s$ ,

$$\alpha_{m,i}^s (\alpha_{m-1}^s \circ g_m^{i-1}) (\alpha_{m-2}^s \circ g_{m-1}^{i-2} \circ g_m^{i-1}) \cdots$$

e

$$\cdots (Dg_{m-2}^{i-3})^{\otimes r} (\alpha_{m-2,i-2}^u \circ g_{m-1}^{i-2} \circ g_m^{i-1}) (Dg_{m-1}^{i-2})^{\otimes r} (\alpha_{m-1,i-1}^u \circ g_m^{i-1}) (Dg_m^{i-1})^{\otimes r} \alpha_{m,i}^u.$$

Afirmamos que estes termos convergem a zero quando  $i \rightarrow \infty$ , de fato,  $\|D^r E_{m-i}^0\|$  é uniformemente limitada, pela escolha de  $\varphi_{m-i}^0$  e tomando  $\delta$  suficientemente pequeno temos que  $\|\alpha_{m-l,i-l}^s\| \|\alpha_{m-l,i-l}^u\| < 1$ , pois

$$\|\alpha_{m-l,i-l}^s\| \leq \lambda + (1 + \gamma)\delta \text{ e } \|\alpha_{m-l,i-l}^u\| \leq \frac{1}{\mu - (1 + \gamma)\delta}.$$

Finalmente pela hipótese de  $\mu > 1$  nesta etapa, garante que  $(Dg_{m-l}^{i-l-1})^{\otimes r}$  é limitada, dado que podemos tomar  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\mu - \delta > 1$  e assim  $\|(Dg_{m-l}^{i-l-1})^{\otimes r}\| \leq \frac{1}{\mu - \delta} < 1$ .

O  $j$ -ésimo resto do  $i$ -ésimo somando na expressão para  $D^r E_m^i$ , compõe-se de  $\xi_{m-j-1,i-j-1}$  com o produto dos termos  $\alpha_{m-l,i-l}^s, \alpha_{m-l,i-l}^u$ , assim como o produto das  $j$  ocorrências de  $(Dg_{m-l}^{i-l-1})^{\otimes r}$ . Como antes, estes termos convergem uniformemente a zero quando  $j \rightarrow \infty$ . Note que  $\xi_m^i$  só envolve derivadas dos  $E_l^k$  de ordem menor do que  $r$ , que convergem uniformemente, pela hipótese de indução, assim como as derivadas de ordem menor que  $r$  dos coeficientes de  $Df$ , que são limitadas dado que  $f \in C^{r+1}$ . Consequentemente, esses termos são dados pela soma parcial de uma série uniformemente convergente. Sabemos que as derivadas de  $E_m^i$  de ordem menor que  $r$  convergem quando  $i \rightarrow \infty$ , portanto concluímos que o limite de  $E_m^i$  é  $C^r$ , como queríamos. E assim finalizamos a demonstração do Teorema de Hadamard-Perron.

**Observação 2.2.** Note que  $(W_m^+)_p$  e  $(W_m^-)_p$  para  $p \in \mathbb{R}^n$  depende continuamente de  $p$ .

Pela caracterização das variedades do Teorema de Hadamard-Perron temos:

**Proposição 2.2.** Se  $p_l \rightarrow p \in \mathbb{R}^n$  quando  $l \rightarrow \infty$  e  $y_l \in (W_m^+)_{p_l}$  para todo  $l \in \mathbb{N}$  e  $y_l \rightarrow y \in \mathbb{R}^n$  quando  $l \rightarrow \infty$  então  $y \in (W_m^+)_p$

*Demonstração.* Fixado  $L \in \mathbb{N}$ , por (ii) no Teorema 2.1 implica para  $\nu < \mu'$  tal que

$$\|f_{m-L}^{-1} \circ \cdots \circ f_{m-1}^{-1}(y_l) - f_{m-L}^{-1} \circ \cdots \circ f_{m-1}^{-1}(p_l)\| \leq \nu^{-L} \|y_l - p_l\| \forall l \in \mathbb{N}$$

Pela continuidade de  $f_m$  temos que

$$\|f_{m-L}^{-1} \circ \cdots \circ f_{m-1}^{-1}(y) - f_{m-L}^{-1} \circ \cdots \circ f_{m-1}^{-1}(p)\| \leq \nu^{-L} \|y - p\|,$$

dado que  $L \in \mathbb{N}$  é arbitrário, por (iii) segue que  $y \in (W_m^+)_p$ . □

**Corolário 2.3.** Se  $p_l \rightarrow p \in \mathbb{R}^n$  quando  $l \rightarrow \infty$  e  $q \in \mathbb{R}^n$  então a sequência  $y_l$  dada por  $(W_m^+)_{p_l} \cap (W_m^-)_q = \{y_l\}$  converge a  $y$ , onde  $\{y\} = (W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$ .

*Demonstração.* Como  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset (W_m^-)_q$  e  $(W_m^-)_q$  é compacto, pois é o gráfico de uma função Lipschitz, existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y_{l_k} \rightarrow y$  para alguma subsequência  $y_{l_k}$ , pela Proposição 2.2 temos que  $y \in (W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$ , mas pelo Lema 2.8 a interseção  $(W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$  consiste de um único ponto, isto implica  $y_l \rightarrow y$ ,  $y \in (W_m^+)_p \cap (W_m^-)_q$ .  $\square$

## 2.2 Conjuntos hiperbólicos e Difeomorfismos de Anosov

Os conjuntos hiperbólicos possuem muitas propriedades importantes nos sistemas dinâmicos, e estudando tais conjuntos desenvolveu-se uma ampla teoria para a dinâmica de aplicações admitindo tais conjuntos. No que segue estudaremos uma classe importante de difeomorfismos, os *difeomorfismos de Anosov*, os quais tem como particularidade que a variedade onde estão definidos é, por si só, um conjunto hiperbólico.

**Definição 2.6.** *Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão  $m$ ,  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , um subconjunto não vazio compacto invariante  $\Lambda \subset M$  é dito hiperbólico para  $f$ , se existe uma métrica riemanniana, a qual será chamada de métrica de Lyapunov em uma vizinhança aberta  $U$  de  $\Lambda$ , e números  $0 < \lambda < 1 < \mu$  tais que para qualquer ponto  $x \in \Lambda$  existe uma decomposição do espaço tangente  $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$  satisfazendo:*

$$D_x f(E^s(x)) = E^s(f(x)) \text{ e } D_x f(E^u(x)) = E^u(f(x));$$

$$\|D_x f \upharpoonright_{E^s(x)}\| \leq \lambda < 1 < \mu \leq \|D_x f \upharpoonright_{E^u(x)}\|.$$

*Os subespaços  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  são chamados de direção estável e instável de  $f$  respectivamente.*

Da caracterização dos subespaços  $E^s$  e  $E^u$ , segue que os vetores em  $E^s$  se contraem com velocidade exponencial no futuro e os vetores em  $E^u$  se contraem no passado. Note que  $0 < \dim(E^s) < m$  e  $0 < \dim(E^u) < m$ . Por exemplo, se  $\dim(E^u) = 0$ , então  $f$  é uma contração, logo não pode ser um difeomorfismo em uma variedade compacta.

**Exemplo 2.2.** 1. *Um exemplo simples de um conjunto hiperbólico é uma órbita periódica hiperbólica.*

2. *Um exemplo de um conjunto hiperbólico bem conhecido é a Ferradura de Smale, construído tomando  $Q = [0, 1]^2$  (um retângulo em  $\mathbb{R}^2$ ) e  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo de  $Q$  sobre a sua imagem, agindo nele de forma que o quadrado é fortemente esticado na direção horizontal e comprimindo na direção vertical. Definimos  $\Lambda$  como a interseção*

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(Q)$$

*O conjunto  $\Lambda$  é chamado a Ferradura de Smale (para  $f$ ). Pode-se mostrar que  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor, em particular ele não possui pontos interiores nem pontos isolados.*

**Definição 2.7.** Um  $C^1$ -difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de uma variedade compacta  $M$ , é dito um difeomorfismo de Anosov se  $M$  é um conjunto hiperbólico para  $f$ .

**Exemplo 2.3.** O automorfismo no toro apresentado no Exemplo 1.3, dado por  $F_L(x, y) = (2x + y, x + y) \bmod 1$ , é um difeomorfismo de Anosov. Neste caso a métrica euclidiana em  $\mathbb{T}^2$  é uma métrica Lyapunov.

**Proposição 2.3.** Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $f : U \rightarrow M$ . As dimensões dos subespaços  $E^u(x)$  e  $E^s(x)$  são localmente constantes e esses subespaços variam continuamente com relação a  $x$ .

*Demonstração.* Da definição de conjunto hiperbólico, para qualquer  $x \in \Lambda$  e  $v \in E^s(x)$

$$\|D_x f^n v\| \leq \lambda^n \|v\|. \quad (2.10)$$

E essa desigualdade caracteriza o subespaço  $E^s(x)$ . Seja  $x_n \rightarrow x$ , tomando uma subsequência se for necessário podemos assumir  $\dim E^s(x_m) = k$  constante. Consideremos uma base ortonormal  $(v_m^{(1)}, \dots, v_m^{(k)})$  para cada  $E^s(x_m)$  tal que  $v_m^{(i)} \rightarrow v^{(i)} \in T_x M$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Pela continuidade de  $Df^n$  e de (2.10) segue que para  $v = (v_m^{(i)})$ ,

$$\|D_x f^n v^{(i)}\| \leq \lambda^n \|v^{(i)}\| = \lambda^n$$

Portanto,  $v^{(i)} \in E^s(x)$ ,  $\dim E^s(x) \geq k$  e  $E^s(x) \supset \lim_{n \rightarrow \infty} E^s(x_m)$ , logo  $\dim E^s(x) \geq k = \dim E^s(x_n)$ .  $\square$

Na próxima seção mostraremos que quando  $f$  é um difeomorfismo de Anosov  $C^2$  as distribuições  $E^s$  e  $E^u$ , na verdade são Hölder contínuos com respeito a  $x$ , que é mais forte que continuidade.

**Corolário 2.4.** Os subespaços  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  são uniformemente transversais, isto é, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que para qualquer  $x \in \Lambda$ ,  $v \in E^s(x)$ ,  $w \in E^u(x)$  o ângulo entre  $v$  e  $w$  é pelo menos  $\alpha_0$ .

*Demonstração.* Seja  $\alpha(x)$  o ângulo mínimo entre  $v \in E^u(x)$  e  $w \in E^s(x)$ . Dado que  $E^u(x) \cap E^s(x) = \{0\}$  então  $\alpha(x) > 0$ , pela proposição anterior  $\alpha(x)$  é contínua em  $\Lambda$ , logo  $\alpha$  têm um mínimo positivo.  $\square$

**Observação 2.3.** Note que todo subconjunto fechado invariante de um conjunto hiperbólico é também um conjunto hiperbólico. Mais interessante, o seguinte resultado garante que pode-se envolver um determinado conjunto hiperbólico por um conjunto hiperbólico maior.

**Proposição 2.4.** Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $f : U \rightarrow M$ , existe uma vizinhança  $V \supset \Lambda$  tal que para qualquer  $g$   $C^1$ -próximo de  $f$ , o conjunto invariante:

$$\Lambda_V^g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\overline{V})$$

é hiperbólico.

*Demonstração.* Fixemos  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno, consideremos uma família de cones horizontais  $H_x^\gamma = \{v + w : v \in E^u(x), w \in E^s(x), \|w\| \leq \gamma\|v\|\}$  e a família de cones verticais  $V_x^\gamma = \{v + w : v \in E^u(x), w \in E^s(x), \|v\| \leq \gamma\|w\|\}$ . Para cada  $x \in \Lambda$  temos uma  $(\lambda, \mu)$ -decomposição implica que:

$$D_x f H_x^\gamma \subset H_{f(x)}^{\lambda\mu^{-1}\gamma}, \quad D_x f^{-1} V_x^\gamma \subset V_{f^{-1}(x)}^{\lambda\mu^{-1}\gamma}$$

$$\|D_x f v\| \geq \frac{\mu}{1 + \gamma} \|v\|, \quad \text{para } v \in H_x^\gamma \quad (2.11)$$

$$\|D_x f w\| \geq (1 + \gamma)\lambda^{-1} \|w\|, \quad \text{para } w \in V_x^\gamma \quad (2.12)$$

Portanto se fixamos  $\delta > 0$  pela continuidade de  $Df$  e  $Df^{-1}$ , existe uma vizinhança  $V \subset \Lambda$  tal que para todo  $x \in \bar{V}$  satisfaz (2.11) com  $\lambda$  substituído por  $\lambda + \delta$  e  $\mu$  por  $\mu - \delta$ , para  $f$  como para  $g$ , isto implica que para todo  $x \in \Lambda_V^g$  as hipóteses da Proposição 2.1 são satisfeitas com  $\lambda' = (1 + \gamma)(\lambda + \delta)$ ,  $\mu' = (\mu - \delta)/(1 + \gamma)$ , portanto, a sequência de diferenciais  $Dg_{g^n(x)}$  admite uma  $(\lambda', \mu')$ -decomposição. Se  $\gamma$  e  $\delta$  são suficientemente pequenos, então  $\lambda' < 1 < \mu'$ , assim  $\Lambda_V^g$  é um conjunto hiperbólico.  $\square$

A Proposição 2.4 tem como consequência imediata um resultado que dá informação sobre o comportamento de difeomorfismos próximos a um difeomorfismo de Anosov.

**Corolário 2.5.** *Qualquer  $C^1$ -perturbação suficientemente pequena de difeomorfismos de Anosov é um difeomorfismo de Anosov.*

## 2.2.1 Variedades estáveis e instáveis para conjuntos hiperbólicos

Em seguida, mostraremos como aplicar o Teorema de Hadamard-Perron em uma forma um pouco mais geral. Usaremos o Teorema 2.1 para mostrar a existência das famílias de variedades estáveis e instáveis dada uma função em uma variedade  $M$ , com conjunto hiperbólico  $\Lambda$ .

**Teorema 2.2** (Teorema das variedades estável e instável para conjuntos hiperbólicos). *Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo de classe  $C^1$ ,  $f : V \rightarrow M$  tal que para cada  $x \in \Lambda$ ,  $D_x f$  admite uma  $(\lambda, \mu)$ -decomposição com  $\lambda < 1 < \mu$ , então para cada  $x \in \Lambda$  existe um par de discos  $C^1$ -mergulhados  $W_{loc}^s(x), W_{loc}^u(x)$ , chamados de variedade local estável e instável respectivamente, tal que*

1.  $T_x W_{loc}^s(x) = E^s(x), T_x W_{loc}^u(x) = E^u(x);$
2.  $f(W_{loc}^s(x)) \subset W_{loc}^s(f(x)), f^{-1}(W_{loc}^u(x)) \subset W_{loc}^u(f^{-1}(x));$

3. Para todo  $\delta > 0$  existe  $C(\delta)$  tal que para  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) &< C(\delta)(\lambda + \delta)^n \text{dist}(x, y) \text{ para } y \in W_{loc}^s(x) \\ \text{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) &< C(\delta)(\mu - \delta)^{-n} \text{dist}(x, y) \text{ para } y \in W_{loc}^u(x) \end{aligned}$$

4. Existe  $\beta > 0$  e uma família de vizinhanças  $O_x$  contendo a bola de centro  $x$  e radio  $\beta$  tal que

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(x) &= \{y : f^n(y) \in O_{f^n(x)}, n = 0, 1, 2, \dots\}; \\ W_{loc}^u(x) &= \{y : f^{-n}(y) \in O_{f^{-n}(x)}, n = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Fixemos  $x \in \Lambda$  e consideremos a aplicação

$$\tilde{f}_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x : B^s(r) \times B^u(r) \subset T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$$

$$\begin{array}{ccc} B^s(\varepsilon) \times B^u(\varepsilon) & \xrightarrow{\tilde{f}_x} & T_{f(x)} M \\ \downarrow \exp_x & & \downarrow \exp_{f(x)} \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Onde  $B^s(\varepsilon)$  é a bola de raio  $\varepsilon$  em  $E^s(x)$  centrada na origem (analogamente  $B^u(\varepsilon)$  respeito a  $E^u(x)$ ). Note que a aplicação  $\tilde{f}_x$  está bem definida para  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  suficientemente pequeno. Dado que  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico para  $f$ , então  $\tilde{f}_x$  pode ser escrita como

$$\tilde{f}_x(u, v) = (A_x u + \alpha_x(u, v), B_x v + \beta_x(u, v)),$$

onde  $u \in E^s(x), v \in E^u(x)$ . Além disso,  $A_x : E^s(x) \rightarrow E^s(f(x))$  e  $B_x : E^u(x) \rightarrow E^u(f(x))$  são aplicações lineares tais que  $A_x$  é uma contração e  $B_x$  uma expansão.

Por outra parte, dado que  $\Lambda$  é compacto, podemos tomar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que todo  $x \in \Lambda$  função  $\exp_x$  seja um difeomorfismo de  $B_\varepsilon = B^s(\varepsilon) \times B^u(\varepsilon)$  em uma vizinhança de  $x$ . Agora, para a construção da variedade estável local, fixemos  $x \in \Lambda$ , consideremos a família de aplicações  $\{\tilde{f}_{f^m(x)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , Para cada  $m \in \mathbb{N}$  identificamos o espaço tangente  $T_{f^m(x)} M$  com  $\mathbb{R}^n$ , por meio dos difeomorfismos  $\tau_m : T_{f^m(x)} M \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  tais que,  $\tau_x(E_x^u) = \mathbb{R}^k$  e  $\tau_x(E_x^s) = \mathbb{R}^{n-k}$  e a métrica Riemanniana (métrica de Lyapunov) em  $T_{f^m(x)} M$  é identificada com a métrica euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $F^m = \tau_{m+1} \circ \tilde{f}_{f^m(x)} \circ \tau_m^{-1}$ , note que 0 é um ponto fixo hiperbólico para  $F_m$ , pelo Lema de Extensão podemos estender esta aplicação a uma aplicação  $\tilde{F}_m$ , em todo  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} T_{f^m(x)} M & \xrightarrow{\tilde{f}_{f^m(x)}} & T_{f^{m+1}(x)} M \\ \downarrow \tau_m & & \downarrow \tau_{m+1} \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\tilde{F}_m} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \end{array}$$

Note que a coleção de funções  $\tilde{F}_m$  satisfaz as hipóteses do teorema de Hadamard-Perron, logo existem as variedades estáveis e instáveis dadas por  $(\tilde{W}_m^-)_0 = \{(\varphi(w), w) : w \in \mathbb{R}^{n-k}\} = \text{graph}\varphi^-$  e  $(\tilde{W}_m^+)_0 = \{(v, \varphi^+(v)) : v \in \mathbb{R}^k\} = \text{graph}\varphi^+$ .

Consideremos

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(x) &= \exp_x\{(v, \varphi^-(v)) : v \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^k\} \\ W_{loc}^u(x) &= \exp_x\{(\varphi^+(w), w) : w \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^{n-k}\}. \end{aligned}$$

Finalmente por (i), (ii) e (iii) no Teorema de Hadamard-Perron implicam as propriedades pedidas para  $W_{loc}^s(x)$  e  $W_{loc}^u(x)$ .

□

**Observação 2.4.** *As variedades estável e instável local não são únicas e, em geral, não há maneira particularmente canônica de consertar. No entanto, deduzimos de (3) e (4) que para quaisquer duas variedades estáveis, digamos  $W_1^s(x)$  e  $W_2^s(x)$ , satisfazendo as afirmações do teorema, a sua interseção  $W_1^s(x) \cap W_2^s(x)$  contém uma vizinhança aberta de  $x$  em cada um delas. Equivalentemente pode-se dizer que para algum  $n \in \mathbb{N}$  temos  $f^n(W_1^s(f^{-n}(x))) \subset W_2^s(x)$  e  $f^n(W_2^s(f^{-n}(x))) \subset W_1^s(x)$ . De fato,  $n$  pode-se escolher uniformemente para  $x \in \Lambda$ . Para a variedade instável vale a observação com  $n$  substituído por  $-n$ .*

Definimos as variedades estável e instável (global)

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W_{loc}^s(f^n(x))) \\ W^u(x) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W_{loc}^u(f^{-n}(x))) \end{aligned}$$

A observação anterior implica que  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  não dependem da escolha das variedades locais. As variedades estável e instável podem ser caracterizadas topologicamente como:

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \{y \in U : \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} \\ W^u(x) &= \{y \in U : \text{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.5.** *Se  $x, y \in \Lambda, z \in W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^s(y)$ , então a interseção  $W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^s(y)$  contém uma vizinhança aberta de  $z$  em ambas variedades (respectivamente para  $W_{loc}^u$ ).*

*Demonstração.* Temos que  $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \text{dist}(f^n(x), f^n(z)) + \text{dist}(f^n(z), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , pois  $z \in W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^s(y)$ . Por (4) do Teorema 2.2,  $f^n(y) \in W_{loc}^s(f^n(x))$  para  $n$  suficientemente grande, logo  $f^n(W_{loc}^s(y)) \subset W_{loc}^s(f^n(x))$ . Dado que  $f^n(W_{loc}^s(y))$  e  $f^n(W_{loc}^s(x)) \subset W_{loc}^s(f^n(x))$  são discos abertos, sua interseção  $f^n(W_{loc}^s(y)) \cap f^n(W_{loc}^s(x)) \subset W_{loc}^s(f^n(x))$  é aberta, logo  $f^n(W_{loc}^s(y)) \cap f^n(W_{loc}^s(x))$  é aberto em  $f^n(W_{loc}^s(x))$  e  $f^n(W_{loc}^s(y))$ , assim,  $z \in f^{-n}(f^n(W_{loc}^s(y)) \cap f^n(W_{loc}^s(x))) \subset W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^s(y)$ . □

**Corolário 2.6.** *Se para  $x, y \in \Lambda$  as variedades estáveis  $W^s(x)$  e  $W^s(y)$  têm interseção não vazia então  $W^s(y) = W^s(x)$ .*

*Demonstração.* Seja  $z \in W^s(y) \cap W^s(x)$  e  $w \in W^s(x)$ , então  $\text{dist}(f^n(w), f^n(x)) \leq \text{dist}(f^n(w), f^n(y)) + \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0$ , portanto  $w \in W^s(y)$ , isto é,  $W^s(x) \subset W^s(y)$ , de forma similar se temos que  $W^s(y) \subset W^s(x)$  logo  $W^s(y) = W^s(x)$ .  $\square$

**Proposição 2.6.** *Denotemos por  $W_\varepsilon^s(x)$  e  $W_\varepsilon^u(x)$  a  $\varepsilon$ -bola em  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  respectivamente. Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer  $x, y \in \Lambda$  a interseção  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$  contém no máximo um ponto  $[x, y]$  e existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, y) < \delta$  para  $x, y \in \Lambda$  então  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* É consequência do Corolário 2.3.  $\square$

**Proposição 2.7.** *Seja  $\Lambda$  um conjunto compacto hiperbólico para  $f \in U \rightarrow M$ . Então existe uma vizinhança aberta  $V_0$  de  $\Lambda$  e  $\alpha_0 > 0$  tal que  $x, y \in \Lambda$  e  $\{z\} = W^s(x) \cap W^u(y) \subset V_0$ , então para qualquer  $v \in T_x W^s(x)$  e  $w \in T_y W^u(y)$ ; o ângulo entre  $v$  e  $w$  é maior do que  $\alpha_0$ .*

*Demonstração.* Escolhemos uma vizinhança  $V \supset \Lambda$  como na Proposição 2.4, dado que  $\Lambda$  é compacto existe  $\delta > 0$  tal que  $\text{dist}(\Lambda, M \setminus V) = \delta$ . Se  $V_0$  uma  $\delta$ -vizinhança de  $\Lambda$  que satisfaz as afirmações da Proposição 2.4. Seja  $x \in \Lambda$  e consideremos  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  de tamanho menor do que  $\delta$ , por (3) no Teorema da Variedade Estável, segue que si  $\{z\} = W^s(x) \cap W^u(y) \subset V_0$  para alguns  $x, y \in \Lambda$ , então  $f^n(z) \in V_0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Consequentemente  $z \in \Lambda_{V_0}^f$ , mas  $\Lambda_{V_0}^f$  é hiperbólico pelo Corolário 2.4, segue a proposição.  $\square$

Já feita a construção das variedades estável e instável e dadas suas caracterizações, obtemos as famílias de subvariedades de uma variedade compacta  $M$ , as quais denominaremos folheação estável e folheação instável.

**Definição 2.8.** *Se  $f$  é um difeomorfismo de Anosov, as famílias  $\mathcal{F}^s = \{W^s(x)\}_{x \in M}$  e  $\mathcal{F}^u = \{W^u(x)\}_{x \in M}$  formam folheações para  $M$ , as quais chamamos de folheação estável e folheação instável respectivamente. Além disso tais folheações são transversais.*

## 2.2.2 Continuidade Hölder das distribuições estável e instável

Nas seções anteriores mostramos que os subespaços estável e instável associados a um difeomorfismo de Anosov dependem continuamente do ponto. Nesta seção mostraremos que, na verdade, as distribuições estável e instável,  $E^s$ ,  $E^u$  são Hölder contínuas.

**Teorema 2.3.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de Anosov  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , então as distribuições  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  são Hölder contínuas.*

Temos pelo Teorema de Whitney que toda variedade  $M$  pode ser mergulhada em um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^N$  com  $N$  grande. Como  $M$  é compacta, a métrica Riemanniana em  $M$  é equivalente à distância  $\|\cdot\|$  induzida pelo mergulho do Teorema.

*Demonstração.* No que segue consideramos  $M$  mergulhada em  $\mathbb{R}^N$ , para algum  $N \in \mathbb{N}$ . A prova do teorema será feita usando os seguintes lemas:

**Lema 2.9.** *Sejam  $A_n$  e  $B_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  duas seqüências de matrizes reais  $N \times N$  tais que para algum  $\Delta \in (0, 1)$  e  $a > 0$ ,*

$$\|A_n - B_n\| \leq \Delta a^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Suponha que existem subespaços  $E_A, E_B \subset \mathbb{R}^N$  e números  $0 < \lambda < \mu$  e  $C > 1$  tais que  $\lambda < a$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \|A_n v\| &\leq C \lambda^n \|v\|, \text{ se } v \in E_A; & \|A_n w\| &\geq C^{-1} \mu^n \|w\|, \text{ se } w \in E_A^\perp \\ \|B_n v\| &\leq C \lambda^n \|v\|, \text{ se } v \in E_B; & \|A_n w\| &\geq C^{-1} \mu^n \|w\|, \text{ se } w \in E_B^\perp, \end{aligned}$$

então

$$\text{dist}(E_A, E_B) \leq 3C^2 \frac{\mu}{\lambda} \Delta^{(\log \mu - \log \lambda) / (\log a - \log \lambda)}.$$

*Demonstração.* Consideremos

$$\begin{aligned} Q_A^n &= \{v \in \mathbb{R}^N : \|A_n v\| \leq 2C \lambda^n \|v\|\} \\ Q_B^n &= \{v \in \mathbb{R}^N : \|B_n v\| \leq 2C \lambda^n \|v\|\}. \end{aligned}$$

Para cada  $v \in \mathbb{R}^N$  escrevamos  $v = v_1 + v_2$ , onde  $v_1 \in E_A$ ,  $v_2 \in E_A^\perp$ . Note que se  $v \in Q_A^n$  então

$$\|A_n v\| = \|A_n(v_1 + v_2)\| \geq \|A_n v_2\| - \|A_n v_1\| \geq C^{-1} \mu^n \|v_2\| - C \lambda^n \|v_1\|,$$

portanto,  $\|v_2\| \leq C \mu^{-n} (\|A_n v\| + C \lambda^n \|v_1\|) \leq 3C^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \|v\|$ , logo

$$\text{dist}(v, E_A) \leq 3C^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \|v\|. \tag{2.13}$$

Agora, seja  $\gamma = \lambda/a < 1$ , então existe um único inteiro não negativo  $n$  tal que  $\gamma^{n+1} < \Delta \leq \gamma^n$ , logo, se  $w \in E_B$ , então

$$\begin{aligned} \|A_n w\| &\leq \|B_n w\| + \|A_n - B_n\| \|w\| \\ &\leq C \lambda^n \|w\| + \Delta a^n \|w\| \\ &\leq (C \lambda^n + (\gamma a)^n) \|w\| \leq 2C \lambda^n \|w\|. \end{aligned}$$

Segue que  $w \in Q_A^n$ , portanto,  $E_B \subset Q_A^n$ . Por simetria  $E_A \subset Q_B^n$ . De (2.13) e a escolha de  $n$ , obtemos

$$\text{dist}(E_A, E_B) \leq 3C^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \leq 3C^2 \frac{\mu}{\lambda} \Delta^{(\log \mu - \log \lambda) / (\log a - \log \lambda)}.$$

□

**Lema 2.10.** *Sejam  $M$  uma subvariedade compacta de  $\mathbb{R}^N$  e  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Então para todo  $a > (\max_{z \in M} \|D_z f\|)^2$ , existe  $D > 1$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x, y \in M$  temos:*

$$\|D_x f^n - D_y f^n\| \leq Da^n \|x - y\|.$$

*Demonstração.* Dado que  $f$  é de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , existe  $D' > 0$  tal que

$$\|D_x f - D_y f\| \leq D' \|x - y\|.$$

Seja  $b = \max_{z \in M} \|D_z f\| \geq 1$ , note que, para todo  $x, y \in M$

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| \leq b^n \|x - y\|.$$

Fixado  $a > b$ . Então o resultado é válido para  $n = 1$  e qualquer  $D \geq D'$ . Assim por indução,

$$\begin{aligned} \|D_x f^{n+1} - D_y f^{n+1}\| &\leq \|D_{f^n(x)} f\| \|D_x f^n - D_y f^n\| + \|D_{f^n(x)} f - D_{f^n(y)} f\| \|D_y f^n\| \\ &\leq bDa^n \|x - y\| + D' \|f^n(x) - f^n(y)\| \|D_y f^n\| \\ &\leq bDa^n \|x - y\| + D'b^n \|x - y\| b^n \\ &\leq Da^{n+1} \|x - y\| \left( \frac{b}{a} + \frac{D'}{D} + \frac{b^{2n}}{a^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Se  $a > b^2$ , então existe  $D > D'$  tal que  $\left( \frac{b}{a} + \frac{D'}{D} + \frac{b^{2n}}{a^{n+1}} \right) < 1$ . □

Agora procedemos com a demonstração do teorema. Seja  $x \in M$ , tomemos  $(T_x M)^\perp$ , dado que  $(TM)^\perp$  é uma distribuição suave, é suficiente provar a Hölder continuidade de  $F = E^s \oplus (TM)^\perp$ . Como  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  são transversais e de dimensões complementares em  $T_x M$  existe  $d > 1$  tal que  $\|D_x f^n(w)\| \geq d^{-1} \mu^n \|w\|$  para  $x \in M$  e  $w \in (E^s(x))^\perp$ , de fato, seja  $w \in (E^s(x))^\perp$ , então  $w = w_s + w_u$  com  $w_s \in E^s(x)$  e  $w_u \in E^u(x)$

$$\begin{aligned} \|D_x f^n(w)\| &= \|D_x f^n(w_s + w_u)\| = \|D_x f^n(w_s) + D_x f^n(w_u)\| \\ &\geq \|D_x f^n(w_u)\| - \|D_x f^n(w_s)\| \geq c^{-1} \mu^n \|w_u\| - c \lambda^n \|w_s\| \\ &\geq c^{-1} \mu^n \|w_u\| - c \lambda^n (\|w\| + \|w_u\|) \\ &\geq \|w_u\| (c^{-1} \mu^n - c \lambda^n) - c \lambda^n \|w\| \\ &\geq \|w\| (c^{-1} \mu^n - 2c \lambda^n) \geq \|w\| \mu^n (c^{-1} - 2c) = d^{-1} \mu^n \|w\|. \end{aligned}$$

Para todo  $x, y \in M$  e qualquer  $n > 0$  sejam  $A_n$  e  $B_n$  matrizes reais  $N \times N$  tais que

$$\begin{aligned} A_n v &= D_x f^n(v) \text{ se } v \in T_x M \text{ e } A_n v = 0 \text{ se } v \in T_x M^\perp \\ B_n v &= D_y f^n(v) \text{ se } v \in T_y M \text{ e } B_n v = 0 \text{ se } v \in T_y M^\perp. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.10  $\|A_n - B_n\| \leq Da^n \|x - y\|$ .

Agora, pelo Lema 2.9 com  $\Delta = D\|x - y\|$ ,  $E_A = F(x)$ ,  $E_B = F(y)$  e  $C = \max\{c, d\}$ , temos que

$$\text{dist}(F(x), F(y)) \leq 3C^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \leq 3C^2 \frac{\mu}{\lambda} \Delta^{(\log \mu - \log \lambda)/(\log a - \log \lambda)},$$

isto é,

$$\text{dist}(E^s(x), E^s(y)) \leq 3C^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \leq 3C^2 \frac{\mu}{\lambda} \Delta^{(\log \mu - \log \lambda)/(\log a - \log \lambda)}.$$

Logo  $E^s$  é Hölder contínua.

Com um argumento similar mostramos também que  $E^u$  é Hölder contínua. □

## 3 Continuidade absoluta das folheações estável e instável

Obtidas as famílias de subvariedades que constituem as folheações estável e instável, neste capítulo mostraremos que estas folheações invariantes pelo difeomorfismo são absolutamente contínuas. A referência principal usada é [13].

### 3.1 Definições e Teorema principal

**Definição 3.1.** *Seja  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação mensurável invertível entre dois espaços de medida  $(X, \nu)$  e  $(Y, \mu)$ . Dizemos que  $T$  é absolutamente contínua se  $T_*\nu$  é absolutamente contínua com respeito a  $\mu$ . Neste caso, definimos o Jacobiano de  $T$  em um ponto  $x$  como a derivada de Radon-Nikodym,*

$$\text{Jac}(T)(x) = \frac{d\mu}{dT_*\nu}$$

Fixado  $x \in M$  e  $r > 0$ , consideremos a família de subvariedades

$$\mathcal{L}(x) = \{\mathcal{F}(w) : w \in B(x, r)\}$$

**Definição 3.2.** *Sejam  $T_1$  e  $T_2$  dois discos locais transversais à folheação  $\mathcal{F}$  em  $p$  e  $q$  respectivamente, a aplicação de holonomia entre  $T_1$  e  $T_2$  gerada pelas folhas  $\mathcal{F}(w)$ , é a função  $\pi_{p,q} = \pi_{p,q}(x) : D_1 \subset T_1 \rightarrow D_2 \subset T_2$ , onde  $D_1$  é um subconjunto aberto de  $T_1$  e  $D_2$  um subconjunto aberto de  $T_2$ , definido por:*

$$\pi_{p,q}(y) = T_2 \cap \mathcal{F}(w) \text{ se } y \in T_1 \cap \mathcal{F}(w), w \in B(x, r).$$

**Definição 3.3.** *Dizemos que a folheação é absolutamente contínua se existe  $J = \text{Jac}(\pi_{p,q}) : D_1 \rightarrow D_2$  tal que*

$$\mu_{D_2}(S) = \int_{\pi_{p,q}^{-1}(S)} J d\mu_{D_1}, \quad S \subset D_2$$

Onde as medidas  $\mu_{D_1}, \mu_{D_2}$ , são as medidas induzidas pela estrutura Riemanniana em  $TM$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de Anosov de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$  em uma variedade  $M$  de dimensão  $m$ . As folheações estável e instável são absolutamente contínuas, mais ainda o Jacobiano da holonomia é contínuo e positivo.*

Começamos esta primeira parte introduzindo o conceito de Pré-folheação porque faremos uma aproximação da folheação instável através de uma pré-folheação, para mostrar a continuidade absoluta desta folheação.

## 3.2 Pré-folheações e Lemas auxiliares

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana suave,  $D^k \subset \mathbb{R}^k$  o  $k$ -disco e  $p \in M$ . O conjunto de todos os mergulhos de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$ ,  $\varphi : D^k \rightarrow M$  tais que  $\varphi(0) = p$ , é um espaço métrico. Denotamos este espaço por:

$$\text{Emb}^r(D^k, 0, M, p) = \{\varphi : D^k \rightarrow M : \varphi(0) = p, \varphi \text{ mergulho } C^r\}$$

A  $C^r$ -distância entre dois difeomorfismos é definida mediante a métrica Riemanniana ou fixando um mergulho de  $M$  em um espaço euclidiano (Nesta última usamos o mergulho do Teorema de Whitney).

**Definição 3.4.** Uma pré-folheação de  $M$  por  $D^k$  discos é uma aplicação  $p \mapsto D_p$  tal que  $D_k$  é um  $C^r$   $k$ -disco em  $M$  contendo  $p$  e dependendo continuamente de  $p$ , no seguinte sentido: para cada  $p \in M$  existe uma carta local,  $U_p$  e uma seção contínua  $\sigma : U \rightarrow \text{Emb}^r(D^k, U)$  tal que:

1.  $M = \bigcup_{p \in M} U_p$ ;
2.  $D_p = \sigma(p)(D^k)$   $p \in U$

Se, além disso, estas seções podem ser escolhidas tal que as aplicações  $(p, x) \mapsto \sigma(p)(x)$  são de classe  $C^s$ ,  $1 \leq s \leq r$ , dizemos que a pré-folheação é de classe  $C^s$ .

**Exemplo 3.1.** Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de  $M$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  e  $n$ -dimensional, seja

$$\mathcal{F}_p(\delta) = \{x \in \mathcal{F}_p \mid d_{\mathcal{F}_p}(x, p) \leq \delta\}.$$

Onde  $d_{\mathcal{F}_p}$  é a distância na folha  $\mathcal{F}_p$ , medida respeitando a estrutura de Riemann em  $T\mathcal{F}$  herdada de  $TM$ . Então para  $\delta > 0$  pequeno,  $p \mapsto \mathcal{F}_p(\delta)$  fornece uma pré-folheação de  $M$  por  $k$ -discos  $C^r$ .

**Exemplo 3.2.** Seja  $N$  um subfibrado de  $k$ -planos em  $TM$ . Então, para  $\delta > 0$  pequeno,

$$p \mapsto \exp_p(N_p(\delta)),$$

fornece uma  $C^r$  pré-folheação de  $M$ , por  $k$ -discos  $C^\infty$ .

**Exemplo 3.3.** Lembrando a Definição 2.8, seja  $\mathcal{F}^u = \{W^u(p)\}$  a folheação instável de  $M$  para um difeomorfismo de Anosov de classe  $C^r$ ,  $r \leq 2$ . Para  $\delta > 0$  pequeno  $W_p^u(\delta)$  é a variedade instável local de tamanho  $\delta$  passando por  $p$ , então

$$p \mapsto W_p^u(\delta),$$

constitui uma pré-folheação de  $M$  por  $k$ -discos.

Agora, vejamos a ideia de aplicação de holonomia ao longo de uma pré-folheação. Isto é a usual noção de translação de uma transversal, para folheações. Seja  $\mathcal{G}$  uma pré-folheação de  $M$  por  $C^r$   $k$ -discos,  $r \geq 1$ , seja  $q \in \text{Int}\mathcal{G}_p$ , onde  $\mathcal{G}_p$  é o  $k$ -disco ao redor de  $p$ , e sejam  $D_p, D_q$  dois  $(m - k)$ -discos suaves mergulhados transversalmente a  $\mathcal{G}_p$  em  $p$  e  $q$  respectivamente.

$$T_p D_p \oplus T_p \mathcal{G}_p = T_p M, \quad T_q D_q \oplus T_q \mathcal{G}_p = T_q M.$$

Então existe uma aplicação sobrejetora  $H_{p,q} : D_{p,q} \rightarrow R_{p,q}$ , onde  $D_{p,q}$  é uma vizinhança de  $p$  em  $D_p$ ,  $H_{p,q}(p) = q$ ,  $H_{p,q}(y) \in \mathcal{G}_y \cap D_q$ . Dado que  $\mathcal{G}$  depende continuamente de  $y \in D_p$  no sentido  $C^r$ ,  $r \geq 1$  e  $\mathcal{G}_p$  intersesta transversalmente  $D_q$  em  $q$ , existe um unicamente um novo ponto da interseção entre  $\mathcal{G}_y$  e  $D_q$ ,  $H_{p,q}(y)$ , dependendo continuamente de  $y$  perto de  $p$ . Chamaremos a aplicação  $H_{p,q}$  de *aplicação de holonomia* definida pela pré-folheação  $\mathcal{G}$ .

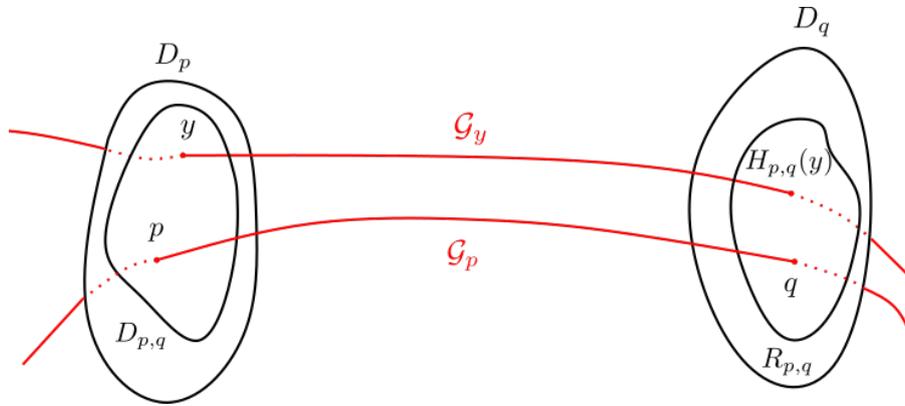


Figura 4 – Holonomia definida pela pré-folheação  $\mathcal{G}$

*Notação:* Denotaremos por  $\rightrightarrows$  a convergência uniforme de uma sequência de funções.

**Lema 3.1.** *Suponha  $h : D^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  é um mergulho topológico e  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de mergulhos  $C^1$ ,  $g_n : D^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que*

$$g_n \rightrightarrows h \quad \text{e} \quad J(g_n) \rightrightarrows J,$$

onde  $J(g_n)$  é o Jacobiano de  $g_n$ . Então  $h$  é absolutamente contínua e tem Jacobiano  $J$ .

*Demonstração.* Mostraremos que para todo  $A \subset D^k$  mensurável

$$m(hA) = \int_A J d\mu;$$

com  $\mu$  a medida de Lebesgue em  $D^k$ . Dado que  $h$  é contínua, é suficiente mostrar a igualdade para  $A \subset D^k$  um subdisco fechado de  $D^k$  arbitrário. Seja  $\varepsilon$  dado, podemos escolher  $A'$  e  $A''$  tais

que  $A'$  está contido no interior de  $A$  e  $A$  no interior de  $A''$ , dado que  $J$  é contínua, estes discos podem ser escolhidos suficientemente próximos de forma que

$$\int_{A'' \setminus A} J < \varepsilon/2.$$

Como  $g_n$  é um mergulho  $C^1$ ,

$$m(g_n(S)) = \int_S J(g_n) d\mu; \quad \text{para qualquer } S \subset D^k,$$

e dado que  $h$  é um mergulho, para  $n$  grande temos que

$$g_n(A') \subset g_n(A) \subset h(A) \subset g_n(A'').$$

Portanto,

$$\int_{A'} J(g_n) d\mu \leq \int_A J(g_n) d\mu \leq \int_{A''} J(g_n) d\mu;$$

mas,

$$\int_A J(g_n) d\mu = m(g_n(A)) \leq m(h(A)) \leq m(g_n(A'')) = \int_{A''} J(g_n) d\mu,$$

o que implica que  $|m(h(A)) - \int_A J(g_n) d\mu| < \varepsilon$  para  $n$  grande. Dado que  $\int_A J(g_n) d\mu$  converge a  $\int_A J d\mu$ , segue que

$$\left| m(h(A)) - \int_A J d\mu \right| \leq \left| m(h(A)) - \int_A J(g_n) d\mu \right| + \left| \int_A J(g_n) d\mu - \int_A J d\mu \right| \leq \varepsilon.$$

□

Para o próximo Lema, considerando  $M$  mergulhada em um espaço euclidiano, para cada  $p \in M$  podemos definir o ângulo entre dois subespaços de  $T_p M$  como segue

$$\angle(A_p, B_p) := \max \{ \{ \angle(a, B_p) : a \in A_p \setminus \{0\} \} \cup \{ \angle(b, A_p) : b \in B_p \setminus \{0\} \} \};$$

onde  $A_p$  e  $B_p$  são subespaços lineares de  $T_p M$ . O ângulo entre dois fibrados  $A, B$  é o supremo de  $\angle(A_p, B_p)$ ,

$$\angle(A, B) := \sup_{p \in M} \angle(A_p, B_p).$$

**Lema 3.2.** *Suponha que  $TM = N \oplus E^s = E^u \oplus E^s$  e  $N$  é suave. Seja  $\mathcal{G}(\delta)$  uma pré-folheação dada por,  $p \mapsto \mathcal{G}_p(\delta) = \exp_p(N_p(\delta))$ . Seja  $0 \leq \beta \leq \pi/2$ , se  $\angle(TD_p, (E)^\perp) \leq \beta$  e  $\angle(TD_q, (E)^\perp) \leq \beta$  e  $\delta > 0$  pequeno então cada aplicação de holonomia  $H_{p,q} : D_{p,q} \rightarrow R_{p,q}$  ao longo de  $\mathcal{G}(\delta)$  é uma imersão.*

*Demonstração.* Dado que  $H_{p,q}$  é suave e a sua derivada é uma função contínua, é suficiente provar que  $D_y H_{p,q} : T_y D_p \rightarrow T_{y'} D_q$  é uma bijeção, onde  $y' = H_{p,q}(y)$ . Dado que  $H_{p,q} = H_{y,y'}$  para  $y$  perto de  $p$ , pois  $H_{p,q}$  é uma holonomia, é suficiente verificar a bijetividade para  $y = p$ . Note que se  $y = p = q$ ,  $H_{p,q} = Id$ .

Por outro lado, temos que o conjunto de subespaços de  $T_p M$  de dimensão igual a  $\dim(E^s(p))$ ,  $\mathcal{A} := \{A_p \subset T_p M : \angle(A_p, (E^u)) \leq \beta\}$  é compacto. Assim, dado que  $H_{p,q}$  depende continuamente de  $p, q, D_p, D_q$ , a compacidade de  $M$  e  $\mathcal{A}$ , a bijetividade na diagonal  $p = q$  implica bijetividade em uma  $\delta$ -vizinhança da diagonal, portanto,  $H_{p,q}$  é uma imersão.  $\square$

### 3.3 Demonstração do Teorema 3.1

*Demonstração do Teorema 3.1.* Como  $E^u$  é uma distribuição contínua em  $TM$ , pelo Corolário 1.4 existe uma aproximação suave  $N$  de  $E^u$ . Pela Proposição 2.7 existe  $\alpha_0 > 0$  tal que para cada  $p \in M$  se  $v \in E_p^s$  e  $w \in E_p^u$  então  $\angle(v, w) \geq \alpha_0$ , logo existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \beta < \pi/2$ ,  $\angle(E^s, (E^u)^\perp) < \beta$  e  $\angle(E^s, N^\perp) < \beta$ . Para mostrar que o Jacobiano da holonomia na folheação instável é contínuo e positivo, consideramos a pré-folheação definida no Exemplo 3.2 iterada pela  $f$ , a qual para muitos iterados é próxima da folheação instável. De fato, consideremos  $\delta > 0$  como no Lema 3.2 e seja

$$\mathcal{G} : \mathcal{G}_y := \exp_y(N_y(\delta)); y \in M$$

$\mathcal{G}$  é uma pré-folheação suave. Seja  $\mathcal{G}^n$  a pré-folheação dada por:

$$\mathcal{G}^n : \mathcal{G}_y^n := f^n \mathcal{G}_{f^{-n}(y)}$$

Seja  $\mathcal{G}^n(\varepsilon)$  a restrição de  $\mathcal{G}^n$  ao raio  $\varepsilon$ ;

$$\mathcal{G}^n(\varepsilon) : \mathcal{G}_y^n(\varepsilon) = \{x \in \mathcal{G}_y^n : d_{\mathcal{G}_y^n}(x, y) < \varepsilon\}.$$

Segue da transformação do gráfico na demonstração do Teorema de Hadamard-Perron que  $\mathcal{G}^n(\varepsilon) \rightrightarrows W^u(\varepsilon)$  e  $T\mathcal{G}^n(\varepsilon) \rightrightarrows E^u$ .

Seja  $p \in M$ , consideremos  $q \in W^u(p)$  e discos transversais à folheação instável  $D_p$  e  $D_q$ , estudaremos a holonomia  $H_{p,q} : D_{p,q} \rightarrow R_{p,q}$  para a folheação  $\mathcal{F}^u$ ,  $H_{p,q}$  é um homeomorfismo e  $R_{p,q}$  uma vizinhança de  $q$  em  $D_q$ .

Como  $\mathcal{F}^u$  é invariante pela função  $f$ , segue que  $f^{-n}(D_p)$  e  $f^{-n}(R_q)$  são transversais a  $f^{-n}(W_p^u) \subset W_{f^{-n}(p)}^u$  em  $f^{-n}(p)$  e  $f^{-n}(q)$  respectivamente, a relação entre  $H_{p,q}$  e  $H_{f^{-n}(p), f^{-n}(q)}$  pode ser expressada pela comutatividade do diagrama.

$$\begin{array}{ccc} f^{-n}(D_{p,q}) & \xrightarrow{H_{f^{-n}(p), f^{-n}(q)}} & f^{-n}(R_{p,q}) \\ \downarrow f^n & & \downarrow f^n \\ D_{p,q} & \xrightarrow{H_{p,q}} & R_{p,q} \end{array}$$

Assim, dado que  $f$  é um difeomorfismo, a existência do Jacobiano contínuo positivo de  $H_{p,q}$  é equivalente à existência do Jacobiano contínuo positivo de  $H_{f^{-n}(p),f^{-n}(q)}$ . Como  $T(f^{-n}(D_p))$  e  $T(f^{-n}(D_q)) \rightrightarrows E^s$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$q \in W_p^u(\varepsilon/2) \not\prec (T(f^{-n}(D_p)), (E^u)^\perp) \leq \beta \text{ e } \not\prec (T(f^{-n}(D_q)), (E^u)^\perp) \leq \beta. \quad (3.1)$$

Além disso, dado que a existência do Jacobiano  $J(H_{p,q})$  é um problema local, podemos escolher  $D_p$  tal que  $D_p = D_{p,q}$ .

Consideremos  $g_n = H_{p,Q_n}^n \upharpoonright_{D_p}$ ,  $Q_n = \mathcal{G}_p^n(\varepsilon) \cap D_q$  e  $h = H_{p,q}$ ; notemos que  $g_n \rightrightarrows h$ , pois  $\mathcal{G}^n(\varepsilon) \rightrightarrows \mathcal{F}^u$ . Agora, afirmamos que:

1.  $g_n$  é um mergulho

$$2. J(g_n) \rightrightarrows J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})}$$

Para provar 1, seja  $\delta > 0$  como no Lema 3.2 e  $\beta$  como em (3.1) tais que cada pré-holonomia,  $g_n$  é uma imersão em seu domínio, além disso,  $g_n$  e  $h$  podem ser definidas em um disco  $\hat{D}_p$  um pouco maior do que  $D_p$ , chamemos  $\hat{g}_n$  e  $\hat{h}$  a extensão a  $\hat{D}_p$  de  $g_n$  e  $h$  respectivamente,

$$\hat{g}_n : \hat{D}_p \rightarrow D_q,$$

Da continuidade e convergência uniforme de  $g_n$  segue que  $\hat{g}_n \rightrightarrows \hat{h}$ . Dado que  $M$  é compacta,  $\hat{g}_n$  é localmente injetiva e  $\hat{h}$  é um homeomorfismo para todo  $y \in D_q$ ,  $\hat{h}^{-1}(y)$  e  $\hat{g}_n^{-1}(y)$  são finitos. Seja  $Y$  uma vizinhança compacta de  $R_{p,q} = hD_p$  no interior de  $\hat{h}\hat{D}_p$ . Para todo  $y \in Y$ ,  $\deg(\hat{h}, y) = 1$ , dado que  $\hat{h}$  é um homeomorfismo. Agora bem, para  $n$  grande temos que  $\hat{g}_n \upharpoonright_{\partial \hat{D}_p}$  está suficientemente próximo de  $\hat{h} \upharpoonright_{\partial \hat{D}_p}$ , portanto, são homotópicos, logo pelo Lema de Homotopia [15],  $\hat{g}_n \upharpoonright_{\partial \hat{D}_p} \simeq \hat{h} \upharpoonright_{\partial \hat{D}_p}$ , logo pelo Teorema 1.5

$$\deg(\hat{g}_n, \partial \hat{D}_p, y) = \deg(\hat{h}, \partial \hat{D}_p, y)$$

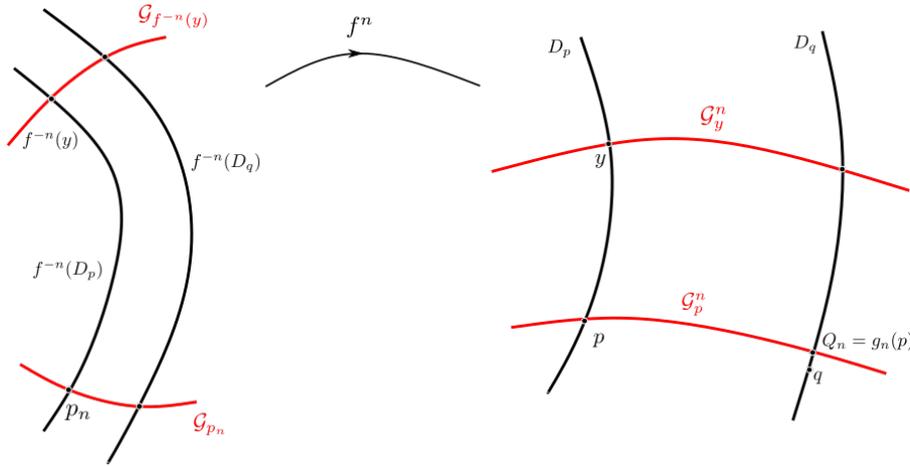
Dado que  $\hat{g}_n$  é uma imersão, então para todo  $y \in Y$ ,  $D_y \hat{g}_n : T_y D_p \rightarrow T_{\hat{g}_n(y)} D_q$  é injetiva, portanto, sobrejetiva, isto implica que todo  $y \in Y$  é um valor regular de  $\hat{g}_n$ , assim, pelo Teorema 1.5, para  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $\deg(\hat{g}_n, y_1) = \deg(\hat{h}, y_2)$ , portanto,  $\deg(\hat{g}_n, \hat{D}_p, y) = 1$  para todo  $y \in Y$ , mas isto implica que  $\hat{g}_n$  é injetiva, pois ela é uma imersão, portanto, temos que  $\hat{g}_n$  mergulha  $\hat{g}_n^{-1}(Y)$ . Notemos que  $D_p \subset \hat{g}_n^{-1}(Y)$ , para  $n$  grande, dado que  $D_p \subset \hat{h}^{-1}(Y)$  e  $\hat{g}_n \rightrightarrows \hat{h}$ , logo  $g_n$  mergulha  $D_p$ .

Agora para provar 2, expressamos  $g_n$  em termos da pré-holonomia ao longo de  $\mathcal{G}$ , da seguinte forma  $g_n : D_p \rightarrow D_q$  como

$$g_n = f^n \circ H_{p_n, q_n}^0 \circ f^{-n};$$

onde  $p_n = f^{-n}(p)$ ,  $q_n = f^{-n}(q)$  e  $Q_n = \mathcal{G}_p^n(\varepsilon) \cap D_q$ . Notemos que isto implica que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{-n}(Q_n) \in \mathcal{G}_{f^{-n}(p)} = \mathcal{G}_{p_n}$ , assim a pré-holonomia ao longo de  $\mathcal{G}$ ,  $H_{P_n, q_n}$ , está bem definida em  $f^{-n}(D_p)$ . Também, como  $T\mathcal{G}_p^n(\varepsilon) \rightarrow E_p^u$  e  $\mathcal{G}_p^n(\varepsilon) \rightarrow W_p^u(\varepsilon)$ , isto implica que para  $n$  grande  $\mathcal{G}_{f^{-n}(p)} = \mathcal{G}_{p_n}$  é expandida por  $f^n$ ; assim,

$$q_n \in \mathcal{G}_{p_n}(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$


 Figura 5 – Ação da  $f^n$ 

Agora, uma vez que  $g_n : D_p \rightarrow D_q$ ,  $g_n = f^n \circ G_{p_n, q_n}^0 \circ f^{-n}$ , podemos derivar usando regra da cadeia. Seja  $y \in D_p$  então,

$$D_y g_n = D_{G_{p_n, q_n}^0(f^{-n}(y))} f^n \cdot D_{f^{-n}(y)} G_{p_n, q_n}^0 \cdot D_y f^{-n} : T_y D_p \rightarrow T_{g_n(y)} D_q$$

e,

$$D_{G_{p_n, q_n}^0(f^{-n}(y))} f^n = D_{f^{-n}(g_n(y))} f^n : T_{f^{-n}(g_n(y))} f^{-n}(D_q) \rightarrow T_{g_n(y)} D_q$$

$$D_{f^{-n}(y)} G_{p_n, q_n}^0 : T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p) \rightarrow T_{f^{-n}(g_n(y))} f^{-n}(D_q)$$

$$D_y f^{-n} : T_y D_p \rightarrow T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p).$$

Logo,

$$J_y(g_n) = \det(D_{f^{-n}(g_n(y))} f^n \upharpoonright_{T_{f^{-n}(g_n(y))} f^{-n}(D_q)}) \cdot \det(D_{f^{-n}(y)} G_{p_n, q_n}^0 \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)}) \cdot \det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p}).$$

Afirmamos que para cada  $y \in D_p$ ,  $\det(D_{f^{-n}(y)} G_{p_n, q_n}^0 \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)})$  converge a 1. De fato, dado que  $Tf^{-n}(D_p) \rightrightarrows E^s$ ,  $Tf^{-n}(D_q) \rightrightarrows E^s$  e  $q_n \in \mathcal{G}_{p_n}(\varepsilon_n)$  com  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , então  $DG_{p_n, q_n}^0 \rightrightarrows Id_{E^s}$ , logo  $\det(D_{f^{-n}(y)} G_{p_n, q_n}^0 \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)}) \rightrightarrows 1$ . Assim, (2) é equivalente a mostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{g_n(y)} f^{-n} \upharpoonright_{T_{g_n(y)} D_q})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})}.$$

Primeiro para o caso especial  $y = p$ ,  $T_p D_p = E_p^s$  e  $T_q D_q = E_q^s$  provaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_p f^{-n} \upharpoonright_{E_p^s})}{\det(D_q f^{-n} \upharpoonright_{E_q^s})} \text{ existe uniformemente.} \quad (3.2)$$

Pela regra da cadeia segue que (3.2) é equivalente à convergência uniforme de

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s})}{\det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})},$$

Mas este é equivalente à convergência uniforme de

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})|$$

Pois, para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n \frac{\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s})}{\det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})} &= \exp \sum_{k=0}^n \log \frac{\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s})}{\det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})} \\ &\leq \exp \sum_{k=0}^n \left( \frac{\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s})}{\det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})} - 1 \right) \end{aligned}$$

A desigualdade é válida, pois  $\log x \leq x - 1$  para todo  $x > 0$ . Agora, afirmamos que existe  $C_1 > 0$  tal que  $C_1^{-1} \leq \det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \leq C_1$ , de fato, nós sabemos que  $\det(D_x f) \neq 0$  para todo  $x \in M$  e dado que  $M$  é compacta,  $f$  é de classe  $C^r$  e  $E^s$  é uma distribuição contínua segue que existe um máximo  $C_1$  para  $\det(D_x f)$ , mas para  $q \in M$ ,  $\det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) = 1/\det(D_{f^k(q)} f \upharpoonright_{E_{f^k(q)}^s})$ , logo

$$\frac{1}{C_1} \leq \det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \leq C_1;$$

assim

$$\prod_{k=0}^n \frac{\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s})}{\det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})} \leq \exp C_1 \sum_{k=0}^{\infty} |\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})|$$

Portanto o problema fica reduzido a mostrar a convergência de

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\det(D_{f^{-k}(p)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)} f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s})|,$$

A fim de mostrar essa convergência, para cada  $k \geq 0$  fazemos o transporte paralelo de  $E_{f^{-k}(p)}^s$  ao longo da geodésica ligando os pontos  $f^{-k}(p)$  e  $f^{-k}(q)$  (esta geodésica é determinada de forma

única pelos pontos  $f^{-k}(p)$  e  $f^{-k}(q)$ , pois eles estão suficientemente próximos), obtemos então um subespaço  $\tilde{E}_{f^{-k}(p)}^s \subset T_{f^{-k}(p)}M$ . Logo, como  $f$  é de classe  $C^r$

$$\begin{aligned} & \left| \det(D_{f^{-k}(p)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \right| \\ & \leq \left| \det(D_{f^{-k}(p)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{\tilde{E}_{f^{-k}(p)}^s}) \right| \\ & \quad + \left| \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{\tilde{E}_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \right| \\ & \leq D_1 d(f^{-k}(p), f^{-k}(q)) + \left| \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{\tilde{E}_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \right| \end{aligned}$$

Pela Hölder continuidade de  $E^s$ , existem  $D_2, \theta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} \left| \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{\tilde{E}_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \right| & \leq D_2 \text{dist}(\tilde{E}_{f^{-k}(p)}^s, E_{f^{-k}(q)}^s) \\ & \leq D_2 \text{dist}(E_{f^{-k}(p)}^s, E_{f^{-k}(q)}^s) \leq D_3 d(f^{-k}(p), f^{-k}(q))^\theta. \end{aligned}$$

Portanto, dado  $q \in W_p^u(\varepsilon/2)$ , pelas propriedades de  $W_p^u$

$$\begin{aligned} & \left| \det(D_{f^{-k}(p)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \right| \\ & \leq D_1 d(f^{-k}(p), f^{-k}(q)) + D_3 d(f^{-k}(p), f^{-k}(q))^\theta \\ & \leq D_1 \mu^{-k} d(p, q) + D_3 \mu^{-k\theta} d(p, q) \\ & \leq D_1 \mu^{-k\theta} d(p, q)^\theta + D_3 \mu^{-k\theta} d(p, q), \quad p \text{ e } q \text{ estão perto} \\ & \leq D_4 (\mu^{-\theta})^k d(p, q)^\theta \end{aligned}$$

Temos que a série  $\sum_{k=0}^{\infty} D_4 (\mu^{-\theta})^k d(p, q)^\theta$  converge, e essa convergência não depende de  $p$  e  $q$ , por comparação temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \det(D_{f^{-k}(p)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(p)}^s}) - \det(D_{f^{-k}(q)}f^{-1} \upharpoonright_{E_{f^{-k}(q)}^s}) \right|$$

converge uniformemente. Portanto, mostramos a existência do limite uniforme (3.2).

Vejamos agora que a existência uniforme deste limite implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{g_n(y)} f^{-n} \upharpoonright_{T_{g_n(y)} D_q})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})}.$$

De fato, seja  $\pi^s$  a projeção de  $TM$  sobre  $E^s$  ao longo de  $E^u$ . Como os espaços são  $Df$  invariantes,  $Df^{-n}$  comuta com  $\pi^s$ , pois se  $v \in T_p M$  então  $v = v^s + v^u$  com  $v^s \in E_p^s$  e  $v^u \in E_p^u$ , então  $D_y f^{-n}(v) = D_y f^{-n}(v^s) + D_y f^{-n}(v^u)$ , assim

$$\pi^s(D_y f^{-n}(v)) = \pi^s(D_y f^{-n}(v^s) + D_y f^{-n}(v^u)) = D_y f^{-n}(v^s) = D_y f^{-n}(\pi^s(v));$$

isto é,

$$\pi^s \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)} \circ D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p} = D_y f^{-n} \upharpoonright_{E_y^s} \circ (\pi^s \upharpoonright_{T_y D_p}).$$

Portanto, para todo  $y \in D_p$

$$D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p} = \left( \pi^s \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)} \right)^{-1} \circ D_y f^{-n} \upharpoonright_{E_y^s} \circ \pi^s \upharpoonright_{T_y D_p}.$$

Podemos escrever

$$\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p}) = \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{E_y^s}) \det(\pi^s \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(\pi^s \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)})}.$$

Lembremos que  $T f^{-n}(D_p) \rightrightarrows E^s$ ,  $n \rightarrow \infty$ , isto implica que  $\pi^s \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)} \rightrightarrows \pi^s \upharpoonright_{E^s}$  que é a identidade em  $E^s$ , segue então que  $\det(\pi^s \upharpoonright_{T_{f^{-n}(y)} f^{-n}(D_p)}) \rightrightarrows 1$ . Notemos que isto também acontece para qualquer  $y \in D_q$ , assim agora só precisamos mostrar que, uniformemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{E^s}) \det(\pi^s \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{g_n(y)} f^{-n} \upharpoonright_{E^s}) \det(\pi^s \upharpoonright_{T_{g_n(y)} D_q})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{E^s}) \det(\pi^s \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{E^s}) \det(\pi^s \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})} \quad (3.3)$$

Dado que  $g_n \rightrightarrows h$ , implica que  $\det(\pi^s \upharpoonright_{T_{g_n(y)} D_q})$  converge uniformemente a  $\det(\pi^s \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})$  quando  $n \rightarrow \infty$ , mas isto implica,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(\pi^s \upharpoonright_{T_y D_q})}{\det(\pi^s \upharpoonright_{T_{g_n(y)} D_q})} = \frac{\det(\pi^s \upharpoonright_{T_y D_q})}{\det(\pi^s \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})}$$

Logo para mostrar (3.3) só precisamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{E^s})}{\det(D_{g_n(y)} f^{-n} \upharpoonright_{E^s})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{E^s})}{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{E^s})}.$$

Aplicando (3.2) para  $y$  e  $h(y)$  no lugar de  $p$  e  $q$  respectivamente, segue que o segundo limite existe uniformemente, agora mostraremos que o primeiro limite existe uniformemente e que é igual ao segundo, de fato vejamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{E^s})}{\det(D_{g_n(y)} f^{-n} \upharpoonright_{E^s})} = 1 \quad \text{uniformemente.} \quad (3.4)$$

Mas pela regra da cadeia mostrar (3.4) é equivalente a mostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\det(D_{f^{-k}(h(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s})}{\det(D_{f^{-k}(g_n(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s})} = 1$$

Com o mesmo argumento anteriormente usado, isto é equivalente a mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\det(D_{f^{-k}(h(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s}) - \det(D_{f^{-k}(g_n(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s})| = 0. \quad (3.5)$$

Agora bem, dado que  $E^s$  é  $\theta$ -Hölder e  $f^{-1}$  é de classe  $C^r$ , como antes obtemos que

$$|\det(D_{f^{-k}(h(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s}) - \det(D_{f^{-k}(g_n(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s})| \leq C_2 d(f^{-k}(h(y)), f^{-k}(g_n(y)))^\theta.$$

De outro lado, como  $f^{-n}(h(y)) \in W_{f^{-n}(y)}^u(\varepsilon_n)$ , pois  $h(y) \in W_y^u$ , então  $f^{-n}(h(y)) \in f^{-n}(W_y^u)$ . Mais ainda, dado que  $h(y) \in W_y^u$ , então  $d(f^{-n}(h(y)), f^{-n}(y)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , logo podemos dizer que

$$d(f^{-n}(h(y)), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon_n; \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Assim,  $f^{-n}(h(y)) \in W_{f^{-n}(y)}^u(\varepsilon_n)$ ,  $f^{-n}(g_n(y)) \in \mathcal{G}_{f^{-n}(y)}(\varepsilon_n)$  e  $\mathcal{G}$  é aproximadamente tangente a  $E^u$ , então  $\varepsilon_n < \mu^{-n}$  para  $n$  grande. Portanto,

$$d(f^{-n}(h(y)), f^{-n}(g_n(y))) \leq \varepsilon_n < \mu^{-n} \quad \text{para } n \text{ grande}.$$

Por outro lado,

$$d(f^{-k}(h(y)), f^{-k}(g_n(y))) = d(f^{n-k}(f^{-n}(h(y))), f^{n-k}(f^{-n}(g_n(y))))$$

y para  $k$  grande  $Tf^{-k}(D_q), \dots, Tf^{-n}(D_q)$  são suficientemente próximas de  $E^u$ , desta forma,

$$d(f^{n-k}(f^{-n}(h(y))), f^{n-k}(f^{-n}(g_n(y)))) \leq C' \lambda^{n-k} d(f^{-n}(h(y)), f^{-n}(g_n(y))) \leq C' \lambda^{n-k} \mu^{-n},$$

para alguma constante  $C'$ . Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\det(D_{f^{-k}(h(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s}) - \det(D_{f^{-k}(g_n(y))} f^{-k} \upharpoonright_{E^s})| &\leq C_2 \sum_{k=0}^{n-1} d(f^{-k}(h(y)), f^{-k}(g_n(y)))^\theta \\ &\leq C_2 (C')^\theta \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^\theta)^{n-k} \right] (\mu^{-\theta})^n \\ &= C_3 (\lambda^\theta + \dots + \lambda^{n\theta}) \mu^{-n\theta} = C_3 \mu^\theta \left( \frac{1 - \lambda^{n\theta}}{1 - \lambda^\theta} \right) \mu^{-n\theta}; \end{aligned}$$

e  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_3 \mu^\theta \left( \frac{1 - \lambda^{n\theta}}{1 - \lambda^\theta} \right) \mu^{-n\theta} = 0$ , este limite não depende dos pontos  $p$  e  $q$ , isto prova (2), ou seja que:

$$J(g_n) \rightrightarrows J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(D_y f^{-n} \upharpoonright_{T_y D_p})}{\det(D_{h(y)} f^{-n} \upharpoonright_{T_{h(y)} D_q})}. \quad (3.6)$$

Logo pelo Lema 3.1 existe o jacobiano da holonomia e é dado por (3.6). Portanto,  $\mathcal{F}^u$  é absolutamente contínua.  $\square$

**Observação 3.1.** O Teorema 3.1 também é válido assumindo  $f$  um difeomorfismo de Anosov de classe  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , no lugar de  $C^2$ , pois, os cálculos feitos são similares se  $f$  for de classe  $C^{1+\alpha}$ . Mas, a hipótese de  $C^{1+\alpha}$  não pode ser retirada, Clark Robinson e Lai-Sang Young fornecem um contraexemplo para o caso em que  $f$  é um difeomorfismo de Anosov de classe  $C^1$ , veja o artigo [14].

### 3.4 Consequências da Continuidade Absoluta

Pelo Teorema 1.1, dada uma folheação de uma variedade Riemanniana podemos obter medidas condicionais com respeito à partição gerada pela folheação. Nesta seção mostramos que estas medidas condicionais estão relacionadas com a medida de volume em cada folha. Na verdade, mostraremos que a continuidade absoluta da folheação garante a continuidade absoluta das medidas condicionais com respeito à medida de volume, o que definimos como *continuidade absoluta ao longo de folhas*.

**Definição 3.5.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta e  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $M$ , dizemos que  $\mathcal{F}$  é absolutamente contínua ao longo de folhas se, para qualquer  $x \in M$  e  $r > 0$  pequeno, dada  $\mathcal{P}$  uma partição de  $B(x, r)$  pelas folhas  $\mathcal{F}(y)$ ,  $y \in B(x, r)$ , (isto é, os elementos de  $\mathcal{P}$  são componentes conexas de  $\mathcal{F}(y) \cap B(x, r)$ ) a medida condicional dada pelo Teorema de Rokhlin (ver Teorema 1.1) ao longo de cada  $L \in \xi$  é absolutamente contínua em relação à medida de volume em  $L$ .*

**Teorema 3.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta e  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $M$ . Se  $\mathcal{F}$  é absolutamente contínua, então  $\mathcal{F}$  é absolutamente contínua ao longo de folhas.*

*Demonstração.* Seja  $x \in M$  e  $r > 0$ . Consideremos  $\mathcal{P}$  a partição de  $B(x, r)$  dada pela família de folhas  $\mathcal{F}(y)$ ,  $y \in B(x, r)$ . Denotamos por  $m_{\mathcal{F}}(w)$  a medida de volume na folha  $\mathcal{F}(w)$  e por  $m_c(w)$  a medida condicional em  $\mathcal{F}(w)$  obtida da desintegração da medida de volume  $m$  com respeito a  $\mathcal{P}$ .

Agora, seja  $r > 0$  suficientemente pequeno. Podemos encontrar uma família de subvariedades  $T(w)$ ,  $w \in B(x, r)$  tal que:

1.  $T(w)$  é transversal a  $\mathcal{F}(w)$ ,  $w \in B(x, r)$ ;
2.  $T(w_1) \cap T(w_2) = \emptyset$  se  $w_2 \notin T(w_1)$  e  $T(w_1) = T(w_2)$  em outro caso;
3.  $B(x, r) \subset \bigcap_{w \in B(x, r)} T(w)$ ;
4.  $T(w)$  depende suavemente de  $w \in B(x, r)$ .

Denotamos por  $m_T(w)$  a medida volume em  $T(w)$ . Seja  $\mathcal{Q}$  uma partição de  $B(x, r)$  gerada pela família  $\{T(w)\}$  e seja  $\tilde{\mu}(w)$  a medida condicional em  $T(w)$  dada pela desintegração da medida de volume  $m$  com relação à partição  $\mathcal{Q}$ , e  $\hat{\mu}$  a medida fator sobre  $B(x, r)/\mathcal{Q}$ .

Consideremos

$$P(w_0) = \{y \in T(w_0) : \text{existe } z \in B(x, r) \text{ tal que } y = T(w_0) \cap \mathcal{F}(z)\}$$

Dado  $y \in P(w_0)$  arbitrário podemos identificar o espaço fator  $B(x, r)/\mathcal{Q}$  com  $\mathcal{F}(y)$ . Como as subvariedades  $T(w)$  são suaves em  $w$ , pelo Teorema clássico de Fubini existem funções estritamente positivas  $g(w, z)$  e  $h(y, w)$  tais que

$$d\tilde{\mu}(w)(z) = g(w, z)dm_T(w)(z), \quad w \in B(x, r), z \in T(w) \quad (3.7)$$

$$d\hat{\mu}(w) = h(y, w)dm_{\mathcal{F}(y)}(w) \quad y \in P(w_0) \quad (3.8)$$

Agora, seja  $B \subset B(x, r)$  um Borel de medida positiva

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_{B(x, r)/\mathcal{Q}} \int_{T(w)} \chi_B(w, z) d\tilde{\mu}(w)(z) d\hat{\mu}(w) \\ &= \int_{B(x, r)/\mathcal{Q}} \int_{T(w)} \chi_B(w, z) g(w, z) dm_T(w)(z) d\hat{\mu}(w) \\ &= \int_{B(x, r)/\mathcal{Q}} \int_{T(w_0)} \chi_B(w, z) g(w, z) \text{Jac}(h_{w_0, w})(y) dm_T(w_0)(z) d\hat{\mu}(w), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $h_{w_0, w}$  é a holonomia entre as transversais  $T(w_0)$  e  $T(w)$  e o ponto  $y$  é tal que  $z = h_{w_0, w}(y)$ . Note que para obter a última igualdade também usamos o fato que  $h_{w_0, w}(P(w_0)) = P(w)$ . Agora, aplicando o Teorema de Fubini a (3.9) obtemos:

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_{T(w_0)} \int_{B(x, r)/\mathcal{Q}} \chi_B(w, z) g(w, z) \text{Jac}(h_{w_0, w})(y) d\hat{\mu}(w) dm_T(w_0)(y) \\ &= \int_{T(w_0)} \int_{\mathcal{F}(y)} \chi_B(w, z) g(w, z) \text{Jac}(h_{w_0, w})(y) h(y, w) dm_{\mathcal{F}(y)}(w) dm_T(w_0)(y). \end{aligned}$$

Consequentemente, pela unicidade da desintegração, a medida condicional  $m_c(y)$  em  $\mathcal{F}(y)$  é equivalente à medida volume,  $m_{\mathcal{F}(y)}$ , com função de densidade

$$\rho^s(y, w) = \text{Jac}(h_{w_0, w})(y) g(w, z) h(y, w).$$

Em particular a medida condicional em cada folha  $\mathcal{F}(y)$  é absolutamente contínua com respeito à medida de volume na folha, portanto,  $\mathcal{F}$  é absolutamente contínua ao longo de folhas.  $\square$

**Corolário 3.1.** *Seja  $B \subset M$  um conjunto com medida de volume zero. Então*

$$m_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(x) \cap B) = 0,$$

para  $m$ -quase todo ponto  $x \in M$ .

*Demonstração.* Suponhamos que existe um conjunto  $B$ , de volume zero e um conjunto de volume positivo  $A \subset M$  tal que

$$m_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(x) \cap B) > 0, \quad \text{para todo ponto } x \in A. \quad (3.10)$$

Seja  $x \in A$ , consideremos o conjunto

$$E := \bigcup_{w \in B(x,r) \cap A} \mathcal{F}(w) \cap B.$$

Seja  $\mathcal{P}$  é a partição de  $B(x, r)$  gerada pela folheação  $\mathcal{F}$ . Pelo Teorema 3.2 temos que a desintegração da medida  $m$  com relação à partição  $\mathcal{P}$ , é equivalente à medida de volume em cada folha. Portanto,

$$m(E) = \int_{B(x,r)/\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{F}(w)} \rho(y, w) \chi_{\mathcal{F}(w) \cap E}(w, y) dm_{\mathcal{F}(w)}(y) d\hat{\mu}(w),$$

onde  $\hat{m}$  é o fator de medida no espaço transversal  $B(x, r)/\mathcal{P}$ . Por (3.10) temos que  $m(E) > 0$ . Como  $E \subset B$ , então  $m(B) > 0$ , o qual contradiz a hipótese.  $\square$

**Corolário 3.2.** *Seja  $B \subset M$  um conjunto mensurável com  $m(B) = 1$ . Então para  $m$ -quase todo ponto  $x \in M$  temos*

$$m_{\mathcal{F}(x)}(\mathcal{F}(x) \setminus B) = 0.$$

*Demonstração.* Suponhamos que existe um conjunto de medida total  $B \subset M$  e um conjunto de medida positiva  $A \subset M$  tais que

$$m_{\mathcal{F}(x)}(\mathcal{F}(x) \cap B) > 0, \text{ para todo } x \in A.$$

Pelo argumento usado na prova do Corolário 3.1 segue que o conjunto  $E := \bigcup_{x \in A} (\mathcal{F}(x) \setminus B)$  tem volume positivo. Note que  $E \subset M \setminus B$ , logo  $m(E) = 0$ , o qual é uma contradição.  $\square$

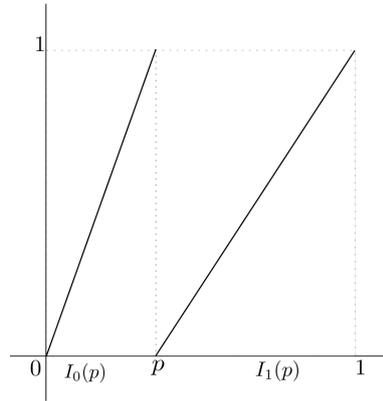
### 3.5 Exemplo de uma folheação não absolutamente contínua

**Exemplo 3.4.** [11] *Existe uma folheação do quadrado  $(0, 1) \times [0, 1]$  que não é absolutamente contínua, de fato mostraremos que existe um conjunto  $E$  de medida 1 no quadrado tal que intersecta a cada folha num único ponto.*

Identificamos  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  com a relação de equivalência dada em (1.5). Seja  $p$  um parâmetro variando no intervalo  $(0, 1)$ . Para cada  $p \in (0, 1)$  definamos uma aplicação linear por partes em  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  como segue:

$$f_p(x) = \begin{cases} x/p & \text{se } x \in I_0(p) = [0, p) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ (x - p)/(1 - p) & \text{se } x \in I_1(p) = [p, 1] \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Alternativamente podemos pensar  $f_p$  como uma função descontínua do intervalo  $[0, 1]$  no  $[0, 1]$ . Afirmamos que para cada  $p \in (0, 1)$   $f_p$  preserva medida, de fato, seja  $J \subset [0, 1]$  de comprimento


 Figura 6 – Aplicação  $f_p$ 

$l(J)$ , a preimagem  $f_p^{-1}(J)$  consiste de um intervalo em  $I_0(p)$  de comprimento  $pl(J)$  unido com um intervalo em  $I_1(p)$  de comprimento  $(1-p)l(J)$ , portanto, temos que  $l(f_p^{-1}(J)) = l(J)$ .

Por outro lado, fixado  $p \in (0, 1)$  podemos codificar cada ponto  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  por uma seqüência  $b_1, b_2, \dots \in \{0, 1\}$  da seguinte forma, seja  $x_n = f_p^n(x)$ ,  $(x_n)$  é a órbita de  $x$  sob  $f_p$ . Seja

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x_n \in I_0(p) \\ 1 & \text{se } x_n \in I_1(p) \end{cases}.$$

Chamamos  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$  a *seqüência de símbolos associada* a  $x$  e  $f_p$ .

Consideremos a função  $g_p$  definida por

$$g_p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ x \mapsto (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Afirmamos que a função  $g_p$  preserva medida, isto é, se  $A \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é um conjunto mensurável, então  $l(g_p^{-1}(A)) = \mu(A)$ , em efeito uma vez que a  $\sigma$ -álgebra em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é gerada pelos conjuntos da forma  $[i : 0] = \{(b_n) : b_i = 0\}$  e  $[i : 1] = \{(b_n) : b_i = 1\}$  (veja [16]), é suficiente mostrar a igualdade para estes conjuntos. Agora, temos que  $\mu([i : 0]) = p$  e

$$l(g_p^{-1}([i : 0])) = l(f^{-i}([0, p])) = m([0, p]) = p,$$

também,  $l([i : 1]) = 1 - p$  e

$$l(g_p^{-1}([i : 1])) = l(f^{-i}([p, 1])) = m([p, 1]) = 1 - p.$$

Note que  $g_p \circ f_p = \sigma \circ g_p$  onde  $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é o Shift de Bernoulli (veja [16]), como  $g_p$  preserva medida, temos que  $f_p$  corresponde à medida de Bernoulli em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , isto é, o

comprimento do intervalo que contem  $x$  cuja sequência de símbolos começa com uma sequência finita  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  é igual a  $p(b_1) \cdot p(b_2) \cdots p(b_n)$ , onde  $p(0) = p$  e  $p(1) = 1 - p$ .

Por outro lado, fixado  $p \in (0, 1)$  e considerando a aplicação  $f_p$ . Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, para  $l$ -quase todo ponto  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  a frequência de 1s na sequência de símbolos  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$  é definida e igual a  $p(1) = 1 - p$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j \leq n - 1 : b_j = 1\}}{n} = 1 - p \text{ para } l\text{-quase todo ponto.}$$

Seja  $E \subset (0, 1) \times S^1$  o conjunto dado por:

$$E = \left\{ (p, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j \leq n - 1 : b_j = 1\}}{n} = 1 - p \right\}.$$

Fixemos  $p \in (0, 1)$  denotemos por  $C_p$  o círculo  $\{p\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset (0, 1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Seja  $m = m_1 \times m_2$ , onde  $m_1$  é a medida de Lebesgue na reta e  $m_2$  a medida de Lebesgue em  $S^1$ , então

$$m(E) = \int_{[0,1]} \int_{\{p\} \times S^1} \chi_E dm_2 dm_1 = \int_0^1 m_2(E \cap C_p) dp = 1,$$

pois  $m_2(E \cap C_p) = 1$ . Definamos ua família de curvas suaves  $\Gamma_\beta$  como segue: seja  $\beta \in [0, 1)$ , consideremos a expansão na base dois de  $\beta$

$$\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots_{(base2)} = \sum \frac{b_n}{2^n}$$

e seja  $\Gamma_\beta$  o conjunto dos pares  $(p, x) \in (0, 1) \times S^1$  tais que a sequência de símbolos de  $x$  por  $f_p$  é igual a  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Note

1. Se  $\beta \neq \alpha$ , então  $\Gamma_\beta \cap \Gamma_\alpha = \emptyset$ ;
2.  $(0, 1) \times S^1 = \bigcap_{\beta} \Gamma_\beta$ .

Vejamos agora que cada  $\Gamma_\beta$  é uma curva suave real analítica. Seja  $(p, x) \in \Gamma_\beta$ , pela definição de  $f_p$  temos  $x_n = b_n p(0) + x_{n+1} p(b_n)$ .

Por indução, segue que

$$\begin{aligned} x &= x(p, \beta) = p(0)(b_1 + p(b_1)(b_2 + p(b_2)(b_3 + \cdots) \cdots) \cdots) \\ &= p(0)(b_1 + b_2 p(b_1) + b_3 p(b_1) p(b_2) + b_4 p(b_1) p(b_2) p(b_3) + \cdots). \end{aligned}$$

Seja  $p(0) = p = (1 + t)/2$  e  $p(1) = 1 - p = (1 - t)/2$ . Se  $|t| \leq c < 1$ , então o  $n$ -ésimo termo da série anterior é tal que

$$p(0)(b_n) p(b_1) p(b_2) p(b_3) \cdots p(b_{n-1}) \leq \left[ \frac{1 + c}{2} \right]^n.$$

Portanto, a série converge uniformemente. De fato isto é verdade também para valores complexos de  $t$  com  $|t| \leq c < 1$ . Portanto, pelo Teorema da convergência uniforme de Weierstrass, para cada  $\beta$  fixado a série define  $x$  como uma função analítica de  $t$  ao longo do intervalo  $|t| < 1$ , ou como uma função analítica de  $p$  ao longo do intervalo  $0 < p < 1$ . Note que  $\Gamma_\beta$  é o gráfico da função analítica real  $p \mapsto x(p, \beta)$ .

Finalmente, afirmamos que  $\Gamma_\beta$  intersecta  $E$  no máximo em um ponto, de fato, sejam  $1 - p$  a frequência de 1's em  $\beta$ . Sejam se  $(p, x), (q, y) \in E \cap \Gamma_\beta$ , então  $g_p(x) = (a_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $g_q(y) = (c_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , como  $a_j = b_j = c_j$ , segue que

$$1 - p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j \leq n - 1 : a_j = 1\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j \leq n - 1 : c_j = 1\}}{n} = 1 - q,$$

logo  $p = q$ , o que implica  $(p, x) = (q, y)$ . Assim, o conjunto  $E$  intersecta cada  $\Gamma_\beta$  em um único ponto.

Se a frequência de 1's em  $\beta$  não está definida então  $\gamma_\beta$  sequer corta  $E$ .

Seja  $\mathcal{F}$  a folheação dada por  $\mathcal{F} = \{\Gamma_\beta\}_\beta$ . Suponhamos que  $\mathcal{F}$  é absolutamente contínua e denotamos por  $m_{\Gamma_\beta}$  a medida de volume na folha  $\Gamma_\beta$ . Então  $m_{\Gamma_\beta}(\Gamma_\beta \setminus E) > 0$ , pois  $\Gamma_\beta$  intersecta  $E$  em um único ponto, o que contradiz o Corolário 3.2. Logo a folheação  $\mathcal{F}$  não é absolutamente contínua, como queríamos mostrar.

## 4 Argumento de Hopf e Multiple Mixing

Neste capítulo apresentamos o argumento de Hopf, e mostramos que, apesar do argumento de Hopf ter sido desenvolvido para mostrar ergodicidade, ele pode ser usado efetivamente para estabelecer a propriedade *Multiple Mixing* (mistura múltipla) de um sistema, que é uma propriedade mais forte que ergodicidade. A referência usada neste capítulo é [6]

### 4.1 Argumento de Hopf

Nesta seção introduzimos o clássico argumento de Hopf que garante que, dada uma função invertível,  $f : X \rightarrow X$  em um espaço métrico com probabilidade Borel, podemos obter ergodicidade da função  $f$  a partir da ergodicidade conjunta das partições estável e instável.

**Definição 4.1.** *Seja  $X$  um espaço métrico munido de uma probabilidade Borel  $\mu$  e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação que preserva a medida  $\mu$ . A partição estável de  $f$  é definida por*

$$W^{ss}(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

**Definição 4.2.** *Dizemos que  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é subordinada a  $W^{ss}$  ou  $W^{ss}$ -saturada se existe um conjunto  $G \subset X$  com  $\mu(G) = 1$  tal que  $x, y \in G$  e  $y \in W^{ss}(x)$  implica  $\varphi(x) = \varphi(y)$ .*

**Observação 4.1.** *Neste caso*

$$\varphi^s(y) := \begin{cases} 0 & \text{se } W^{ss}(x) \cap G = \emptyset \\ \varphi(x) & \text{se } y \in W^{ss}(x) \cap G \end{cases} \quad \text{q.t.p. } \varphi(x)$$

*é (em quase todo ponto) constante nos conjuntos estáveis.*

**Teorema 4.1** (Argumento de Hopf). *Seja  $(X, \mu)$  um espaço métrico com probabilidade Borel. Se  $f : X \rightarrow X$  preserva  $\mu$ , então toda função  $\varphi \in L^2(\mu)$  invariante por  $f$  é  $W^{ss}$ -saturada.*

*Demonstração.* Primeiro consideremos  $\varphi \in L^2$  uma função Lipschitz, com constante de Lipschitz  $C$ . Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff existe um conjunto de medida total,  $G_\varphi \subset X$ , tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) \quad \text{para todo } x \in G_\varphi.$$

Seja  $x, y \in G_\varphi$ ,  $y \in W^{ss}(x)$ ,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(y)) \right| \leq C \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(f^k(x), f^k(y)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo,  $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)$ .

Agora, seja  $\varphi \in L^2$ , uma função invariante por  $f$ . Existe uma sequência  $\varphi_n$  de funções Lipschitz limitadas tais que  $\varphi_n \xrightarrow{L^2} \varphi$ . Isto implica  $\tilde{\varphi}_n \xrightarrow{L^2} \tilde{\varphi}$ , como  $\varphi$  é invariante  $\tilde{\varphi} = \varphi$ . Assim,  $\tilde{\varphi}_n \xrightarrow{L^2} \varphi$ , então existe uma subsequência  $n_l$  e um conjunto de medida total  $G_0$  tal que

$$\tilde{\varphi}_{n_l}(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{para todo } x \in G_0.$$

Para todo  $x, y \in G_0 \cap G_{\varphi_{n_l}}$  e  $y \in W^{ss}(x)$ ,

$$\varphi(x) = \lim \tilde{\varphi}_{n_l}(x) = \lim \tilde{\varphi}_{n_l}(y) = \varphi(y).$$

Isto finaliza a prova. □

Se  $f$  for invertível podemos dar a definição da *partição instável* de  $f$ :

$$W^{su} = \{y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\},$$

junto com a definição de aplicação subordinada a  $W^{su}$  ou  $W^{su}$ -saturada, como no caso de  $W^{ss}$ . E assim obtemos:

**Teorema 4.2.** *Seja  $(X, \mu)$  um espaço de medida,  $\mu$  uma probabilidade Boreliana. Se  $f : X \rightarrow X$  é invertível e preserva a medida  $\mu$ , então toda função  $\varphi \in L^2(\mu)$  invariante por  $f$  é  $W^{ss}$  e  $W^{su}$ -saturada.*

Agora, ligando o Teorema 4.2 com a ergodicidade damos a definição a seguir.

**Definição 4.3.**  $W^{ss}, W^{su}$  são ditos conjuntamente ergódicos se

$$\varphi \in L^2(\mu), W^{ss}\text{-saturada e } W^{su}\text{-saturada, então } \varphi \stackrel{q.t.p}{=} \text{const.}$$

**Teorema 4.3.** *Seja  $(X, \mu)$  um espaço de medida, com  $\mu$  probabilidade Borel. Seja  $f : X \rightarrow X$  é invertível e preserva a medida  $\mu$ , se  $W^{ss}$  e  $W^{su}$  são conjuntamente ergódicos, então  $f$  é ergódica.*

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in L^2$  uma função invariante por  $f$ . Pelo Teorema 4.2,  $\varphi$  é  $W^{ss}, W^{su}$ -saturada, logo, pela hipótese  $\varphi = \text{const.}$  em quase todo ponto. □

Embora neste capítulo vamos obter um resultado mais forte, notamos outro resultado conhecido e simples, Uma vez que a ergodicidade conjunta não é afetada se substituirmos  $f$  por  $f^n$ , na verdade temos:

**Teorema 4.4.** *Seja  $(X, \mu)$  um espaço de medida, onde  $\mu$  é uma probabilidade Boreliana. Seja  $f : X \rightarrow X$  invertível preservando a medida  $\mu$ , se  $W^{ss}$  e  $W^{su}$  conjuntamente ergódicos, então  $f^n$  é ergódica para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Observação 4.2.** *No caso de difeomorfismos de Anosov as partições estável e instável coincidem com as folheações estável e instável.*

## 4.2 Multiple Mixing

**Definição 4.4.** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação mensurável e  $\mu$  uma probabilidade Borel, invariante por  $f$ . Dizemos que  $f$  é mixing com relação à medida  $\mu$  se dadas duas funções,  $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$*

$$\int (\varphi \circ f^n) \cdot \psi d\mu \longrightarrow \int \varphi d\mu \cdot \int \psi d\mu \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Note que a definição anterior é equivalente a dizer que

$$\varphi \circ f^n \xrightarrow{w} \text{const. para toda } \varphi \in L^2.$$

onde  $\xrightarrow{w}$  denota convergência na topologia fraca.

**Observação 4.3.** *Um sistema mixing é necessariamente ergódico. De fato, suponhamos que existe algum conjunto invariante  $A \subset M$  com  $0 < \mu(A) < 1$ , tomando  $\varphi = \psi = \chi_A$ , temos que*

$$\int (\chi_A \circ f^n) \cdot \chi_A d\mu = \mu(f^{-n}(A) \cap A) = \mu(A) \text{ para todo } n,$$

enquanto  $\int \chi_A d\mu \int \chi_A d\mu = \mu(A)\mu(A) = \mu(A)^2$ . Portanto  $\mu(A) = \mu(A)$ , isto é  $\mu(A) = 1$  ou  $\mu(A) = 0$ , logo  $f$  é ergódica.

Mas nem todo sistema ergódico é multiple mixing.

**Exemplo 4.1.** *Considere  $\theta \in \mathbb{R}$  irracional. Pela Proposição 1.8, a rotação  $R_\theta$  no círculo  $S^1$  é ergódica para a medida de Lebesgue  $m$ . No entanto,  $(R_\theta, m)$  não é mixing. De fato, se  $A, B \subset S^1$  são dois intervalos pequenos (com comprimento  $1/10$ , por exemplo) então existem infinitos valores de  $n$  tais que  $R_\theta^{-n}(A) \cap B = \emptyset$  e, portanto,  $m(R_\theta(A) \cap B) = 0$  para infinitos valores de  $n$ , como  $m(A)m(B) \neq 0$ , o limite em (4.1) para  $\varphi = \chi_A$  e  $\psi = \chi_B$  não se verifica.*

**Definição 4.5.** *Dizemos que a medida  $\mu$  é multiple mixing ou  $N$ -mixing se para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in L^\infty$  e qualquer vizinhança fraca  $U$  da função (constante)  $\prod_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu$ , existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j} \in U$  para todo  $n_i \geq K$ ,  $i = 1, \dots, N$ , isto é,*

$$\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j} \xrightarrow{w} \prod_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu, \quad \varphi_i \in L^\infty$$

Consideremos  $\psi_k = \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j(k)}$  com  $n_i(k) \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $\psi_k \xrightarrow{w} \psi$ , onde  $\psi =$

$\prod_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu$ , então  $\psi$  é um ponto de acumulação (na topologia fraca) de  $\psi_k$ . O termo  $N$ -mixing

significa que para  $\varphi \in L^\infty$  existe só um ponto de acumulação na topologia fraca de  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j}$  o qual é  $\prod_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu$ .

**Proposição 4.1.** *Uma medida de probabilidade Borel  $\mu$  invariante por  $f$  é  $N$ -mixing se, e somente se, dadas  $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in L^2(\mu)$ , todo ponto de acumulação na topologia fraca de  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j}$  é constante.*

*Demonstração.* Pela definição de  $N$ -mixing, existe somente um ponto de acumulação na topologia fraca para  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j^{(k)}}$ , o qual é  $\prod_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu$  (constante).

Suponhamos que todo ponto de acumulação na topologia fraca para  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j^{(k)}}$  é constante. Determinamos recursivamente a constante. Primeiro, tomemos  $\varphi_i \equiv 1$  para todo  $i \neq 1$ , temos então que

$$\int \varphi_1 d\mu = \int \varphi_1 \circ f^n \cdot 1 d\mu \rightarrow \text{const} \cdot \int 1 d\mu = \text{const}.$$

Assim, a constante é  $\int \varphi_1 d\mu$  para cada subsequência, portanto,  $\varphi_1 \circ f^n \xrightarrow{w} \int \varphi_1 d\mu$ ; por simetria  $\varphi_i \circ f^n \xrightarrow{w} \int \varphi_i d\mu$ , em particular  $\varphi_2 \circ f^{n_2} \xrightarrow{w} \int \varphi_2 d\mu$ , quando  $n_1 + n_2 \rightarrow \infty$ .

Supondo agora que  $\varphi_i \equiv 1$  para todo  $i \notin \{1, 2\}$ , então

$$\int \varphi_1 \circ f^{n_1} \varphi_2 \circ f^{n_1+n_2} \cdot 1 d\mu = \int (\varphi_1 \varphi_2 \circ f^{n_2}) \circ f^{n_1} d\mu = \int \varphi_2 \circ f^{n_2} \varphi_1 d\mu \rightarrow \int \left( \int \varphi_2 d\mu \right) \varphi_1 d\mu.$$

Portanto,  $(\varphi_1 \circ f^{n_1})(\varphi_2 \circ f^{n_1+n_2}) \xrightarrow{w} \int \varphi_1 d\mu \int \varphi_2 d\mu$ , e isto acontece para qualquer  $\varphi_i$ , logo o mesmo argumento temos que

$$\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j} \xrightarrow{w} \prod_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu.$$

□

### 4.3 O Argumento de Hopf Unilateral

**Proposição 4.2.** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $f : X \rightarrow X$ ,  $\mu$  uma probabilidade Borel invariante,  $\varphi_i \in L^2(\mu)$ , então qualquer ponto de acumulação na topologia fraca de*

$$\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j^{(n)}}, \text{ com } n_i(n) \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

é  $W^{ss}$ -saturados.

*Demonstração.* Suponhamos primeiro,  $\varphi_i \in L^2$  funções Lipchitz limitadas. Consideremos  $\psi_n = \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j(n)}$ , e seja  $\psi$  um ponto de acumulação na topologia fraca de  $\psi_n$ , isto é,  $\psi_{n_j} \xrightarrow{w} \psi$  para alguma subsequência  $n_j$ , para simplificar a notação diremos simplesmente que  $\psi_n \xrightarrow{w} \psi$ . Pelo Lema de Banach-Saks (veja [5]), existe uma subsequência  $\{\psi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \psi_{n_k} \xrightarrow{L^2} \psi, \quad m \rightarrow \infty.$$

Mas, isto implica que existe uma subsequência  $m_l$  tal que

$$\Psi(x) = \frac{1}{m_l} \sum_{k=0}^{m_l-1} \psi_{n_k}(x) \rightarrow \psi(x) \quad \text{quando } l \rightarrow \infty, \text{ para } \mu\text{-quase todo } x \in X.$$

Seja  $G$  o conjunto onde vale esta convergência, para todo  $x, y \in G$ .

$$\begin{aligned} |\Psi_l(x) - \Psi_l(y)| &= \frac{1}{m_l} \left| \sum_{k=0}^{m_l-1} \psi_{n_k}(x) - \psi_{n_k}(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{m_l} \sum_{k=0}^{m_l-1} |\psi_{n_k}(x) - \psi_{n_k}(y)|. \end{aligned}$$

Abusando da notação escrevemos  $\psi_{m_l-1} = \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{n_i(l)}$  no lugar de  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j(m_l-1)}$ . Assim,

$$\begin{aligned} |\Psi_l(x) - \Psi_l(y)| &\leq \frac{1}{m_l} \left| \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(x) - \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(y) \right| \\ &= \frac{1}{m_l} \left| \sum_{j=1}^N \left[ \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(x) \right] [\varphi_j \circ f^{n_j(l)}(x) - \varphi_j \circ f^{n_j(l)}(y)] \left[ \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(y) \right] \right| \end{aligned}$$

Como  $\varphi_i$  é limitada e Lipschitz, temos que  $[\varphi_i \circ f^{n_i(l)}(x) - \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(y)] \rightarrow 0$  quando  $l \rightarrow \infty$  e os produtos  $\left[ \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(x) \right]$  e  $\left[ \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_i \circ f^{n_i(l)}(y) \right]$  são limitados, então  $\psi$  é  $W^{ss}$ -saturada. Agora, para  $\varphi_i \in L^2(\mu)$  arbitrárias, existem  $\tilde{\varphi}_i \in L^2(\mu)$  funções Lipschitz limitadas, tais que para cada  $i$ ,  $\tilde{\varphi}_i$  é suficientemente próxima de  $\varphi_i$ , então

$$\left\| \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j} - \prod_{i=1}^N \tilde{\varphi}_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j} \right\|_2 \leq C \sum_{i=1}^N \|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\|_2.$$

Assim, se  $\varphi$  é um ponto de acumulação na topologia fraca de  $\prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j}$ , então  $\varphi$  é um ponto

de acumulação fraco de  $\prod_{i=1}^N \tilde{\varphi}_i \circ f^{\sum_{j=1}^i n_j}$  o que implica que  $\varphi$  é  $W^{ss}$ -saturado, como queríamos mostrar.  $\square$

A Proposição 4.1 fornece de forma imediata uma consequência forte da Proposição 4.2.

**Teorema 4.5.** *Uma aplicação  $f$  é multiple mixing se toda função  $\varphi \in L^2(\mu)$   $W^{ss}$ -saturada é constante em quase todo ponto.*

No Exemplo 1.3 as linhas de contração têm inclinação irracional, então as interseções de cada uma com o círculo  $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$  são a órbita de uma rotação irracional cuja ergodicidade implica que a partição estável  $W^{ss}$  é ergódica, Proposição 1.8.

Logo pelo Teorema 4.5 obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 4.3.** *Se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , então  $F_A$  é multiple mixing com respeito à medida de Lebesgue.*

## 4.4 O Argumento de Hopf Bilateral

**Teorema 4.6.** *Seja  $(X, \mu)$  um espaço métrico, com medida de probabilidade Borel,  $\mu$ . Se  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação invertível que preserva  $\mu$  e  $\varphi \in L^2(\mu)$ , então qualquer ponto de acumulação na topologia fraca de  $U_f^n(\varphi)$  com  $n \rightarrow \infty$  é  $W^{ss}, W^{su}$ -saturado. Onde  $U_f$  é o operador linear dado por*

$$\begin{aligned} U_f : L^1(\mu) &\rightarrow L^1(\mu) \\ \varphi &\mapsto U_f(\varphi) = \varphi \circ f. \end{aligned}$$

O operador  $U_f$  é chamado de operador de Koopman.

*Demonstração.* Denotemos por  $I \subset L^2(\mu)$  o subespaço fechado de funções  $W^{ss}$ -saturadas, e por  $I^\perp = \{\varphi \in L^2(\mu) : \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \text{ para todo } \psi \in I\}$  o seu complemento ortogonal. Seja  $\{\psi\}$  uma subsequência tal que  $U_f^{n_i} \xrightarrow{w} \psi$ , devemos mostrar que  $\psi \in I$ . Seja  $\varphi = \varphi_I + \varphi^\perp \in I \oplus I^\perp$  e uma subsequência  $\{n_{i_k}\}$  tal que  $U_f^{n_{i_k}}(\varphi_I) \xrightarrow{w} \psi_I$ ,  $U_f^{n_{i_k}}(\varphi^\perp) \xrightarrow{w} \psi^\perp$ , portanto  $\psi = \psi_I + \psi^\perp$ , pela Proposição 4.2,  $\psi^\perp$  é  $W^{ss}$ -saturado, pois é um ponto de acumulação fraco de  $\varphi \circ f^n$ , logo temos que  $U_f^{-n}(\psi^\perp)$  também é  $W^{ss}$ -saturado para todo  $n$ , e portanto  $\psi' = \lim_{k \rightarrow \infty} U_f^{-n_{i_k}}(\psi^\perp)$  é  $W^{ss}$ -saturado. Por outro lado, aplicando a Proposição 4.2 a  $\psi^\perp$  e  $f^{-1}$  temos que  $\psi'$  é  $W^{ss}$ -saturado, isto é,  $\psi' \in I$ , temos então

$$\langle \psi^\perp, \psi^\perp \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle U_f^{n_i}(\varphi^\perp), \psi^\perp \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \varphi^\perp, U_f^{-n_i}(\psi^\perp) \rangle = \langle \varphi^\perp, \psi' \rangle = 0$$

Portanto,  $\psi^\perp = 0$  e assim,  $\psi = \psi_I \in I$ , dado que  $\psi_I$  é  $W^{ss}$ -saturada, segue que os pontos de acumulação na topologia fraca de  $U_f^n(\varphi)$  são  $W^{ss}, W^{su}$ -saturados.  $\square$

**Teorema 4.7.** *Seja  $X$  um espaço métrico com medida de probabilidade Borel  $\mu$  e seja  $f : X \rightarrow X$  invertível, preservando  $\mu$ . Se  $W^{ss}, W^{su}$  são conjuntamente ergódicos, então  $f$  é mixing.*

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in L^2(\mu)$ , então qualquer ponto de acumulação na topologia fraca de  $U_f^{-n}(\varphi)$  é  $W^{ss}, W^{su}$ -saturado. Desde que  $W^{ss}, W^{su}$  são conjuntamente ergódicos, segue que se  $\psi$  é um ponto de acumulação fraco de  $U_f^n(\varphi)$  então  $\psi = \text{const.}$  em quase todo ponto. Assim,  $\varphi \circ f^{n_i} \xrightarrow{w} \text{const.}$ , como

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \varphi \circ f^{n_i}, 1 \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \varphi \circ f^{n_i} d\mu = \int \varphi d\mu,$$

portanto,  $\text{const.} = \int \varphi d\mu$ , assim, mostramos que  $\varphi \circ f^n \xrightarrow{w} \int \varphi d\mu$  para toda  $\varphi \in L^2(\mu)$ , logo  $f$  é mixing.  $\square$

**Teorema 4.8.** *Seja  $X$  é um espaço métrico com probabilidade Borel  $\mu$ ,  $f : X \rightarrow X$  invertível preservando  $\mu$ , se*

$$\varphi \in L^2(\mu) \text{ } f\text{-invariante, } W^{ss}\text{-saturada e } W^{su}\text{-saturada} \Rightarrow \varphi = \text{const. em quase todo ponto,}$$

então  $f$  é ergódica.

*Demonstração.* Seja  $\varphi$  uma aplicação invariante por  $f$ , então  $\varphi$  é um ponto de acumulação na topologia fraca de  $\varphi = \prod_{i=1}^N \varphi_i \circ f^{n_i}$ , ( $N = 1$ ,  $\varphi_i = \varphi$ ), portanto  $\varphi$  é  $W^{ss}$  e  $W^{su}$ -saturada, logo pela hipótese,  $\varphi$  é constante em quase todo ponto.  $\square$

Aplicamos agora estes resultados aos automorfismos hiperbólicos no toro, como o Exemplo 1.3, para demonstrar o uso clássico do argumento de Hopf para obter ergodicidade, exceto que o Teorema 4.7 implica que o sistema é mixing, um resultado mais forte que ergodicidade.

**Proposição 4.4.** *Seja  $A \in GL(m, \mathbb{Z})$  hiperbólica, então o automorfismo  $F_A$  do toro  $\mathbb{T}^m$  induzida por  $A$  é mixing com respeito à medida de Lebesgue.*

*Demonstração.* Denotemos por  $E^s$  a projeção sobre o toro do subespaço linear associado aos autovalores de módulo menor do que 1 e  $E^u$  a projeção sobre o toro do subespaço associado aos autovalores de módulo maior que 1. Seja  $p \in \mathbb{T}^m$ . As variedades estável e instável para a aplicação  $F_A$  são dadas por

$$W^{ss}(p) = p + E^s \text{ e } W^{su}(p) = p + E^u \text{ respectivamente}$$

Escolhamos um sistema de coordenadas nas direções de  $E^s$  e  $E^u$ , que dá uma carta  $(x, y) \in U$  definida em uma vizinhança  $U$  de um ponto arbitrário do toro, nesta carta, as subvariedades

estável e instável são horizontais e verticais respetivamente a medida de Lebesgue toma a forma  $dx dy$ . Seja  $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^m)$  e  $\psi$  um ponto de acumulação de  $\varphi \circ F_A^n$  na topologia fraca. Temos que  $\psi$  é  $W^{ss}$  e  $W^{su}$ -saturada, isto é, existe um conjunto de medida total  $G \subset \mathbb{T}^m$ , tal que  $x, y \in G$ ,  $y \in W^{ss}(x)$  implica que  $\psi(x) = \psi(y)$ , e também se  $x, y \in G$ ,  $y \in W^{su}(x)$  implica que  $\psi(x) = \psi(y)$ , precisamos mostrar que  $\psi$  é constante, assim pelo Teorema 4.7 temos que  $f$  é mixing. De fato, sejam  $D^s \subset E^s$  e  $D^u \subset E^u$  dois discos pequenos e  $p \in \mathbb{T}^m$ , então  $p$  tem uma vizinhança que é uma rotação e translação da forma  $D^s \times D^u$  e  $C = G \cap (D^s \times D^u)$  tem medida de Lebesgue total em  $D^s \times D^u$ , isto é, se  $\mu^s, \mu^u$  denotam as medidas de Lebesgue normalizadas em  $D^s, D^u$  e  $\mu = \mu^s \times \mu^u$ , então  $\int_{D^s \times D^u} \chi_C d\mu = 1$ . Pelo Teorema de Fubini, temos

$$1 = \int_{D^s \times D^u} \chi_C d\mu = \int_{D^s} \int_{D^u} \chi_C d\mu^s d\mu^u,$$

assim,  $\int_{D^u} \chi_C(u, \cdot) d\mu^u = 1$  para  $\mu^s$ -quase todo ponto  $u \in D^s$ .

Fixemos  $u_0 \in D^s$ , consideremos o conjunto  $C^s := D^s \times (C \cap (\{u_0\} \times D^u))$ , notemos que  $C^s$  tem medida total. Se  $(u, v), (u', v') \in D^s \cap C$ , então

$$\psi(u, v) = \psi(u_0, v) = \psi(u_0, v') = \psi(u', v').$$

Isto aplica-se para qualquer vizinhança arbitrária de  $p \in \mathbb{T}^m$ , assim, pela conexidade de  $\mathbb{T}^m$ ,  $\psi = \text{const.}$  em quase todo ponto.  $\square$

## 4.5 Estrutura de Produto e Continuidade Absoluta II

Dado que no contexto geral não podemos usar o Teorema de Fubini como na Proposição 4.4, é necessário estabelecer as definições de vizinhanças com estrutura de produto e a continuidade absoluta das folheações invariantes.

**Definição 4.6.** *Seja  $(X, \mu)$  um espaço métrico de probabilidade Borel,  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação invertível preservando a medida  $\mu$ . Dizemos que  $V \subset X$  é um conjunto com estrutura de produto se, para  $x \in V$  e  $k \in \{ss, su\}$  existem  $W_{loc}^k(x) \subset W^k(x)$  e uma aplicação mensurável  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow X$  com  $[x, y] \in W_{loc}^{ss}(x) \cap W_{loc}^{su}(y)$ .*

**Definição 4.7.** *Dizemos que  $W^{ss}$  é absolutamente contínua II em um conjunto com estrutura de produto,  $V$  (com relação a  $\mu$ ) se para cada  $x \in V$  e  $k \in \{ss, su\}$  existem medidas  $\mu_x^k$  em  $W_{loc}^k(x)$  tal que  $\mu_x^u(N) = 0$  implica  $\mu_y^u([N, y]) = 0$  e se  $\psi \in L^1(\mu)$  então  $\int_V \psi d\mu = \int_{W_{loc}^{ss}(z)} \int_{W_{loc}^{su}(x)} \psi d\mu_x^u d\mu_z^s(x)$ .*

**Corolário 4.1.** *Se  $f : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de Anosov de classe  $C^2$ , então as folheações estável e instável são absolutamente contínua II.*

*Demonstração.* Imediata do Teorema 3.2. □

## 4.6 Consequências

**Teorema 4.9.** *Seja  $(X, \mu)$  é um espaço métrico com probabilidade Borel, e  $f : X \rightarrow X$  invertível preservando a medida  $\mu$  ergódica. Se  $W^{ss}$  é absolutamente contínua II em um conjunto com estrutura produto  $V$ , e  $\mu(f^{-1}(V) \cap V) > 0$ , então  $W^{ss}$  é ergódica.*

**Corolário 4.2.** *Seja  $X$  um espaço métrico com probabilidade Borel  $\mu$  e  $f : X \rightarrow X$  invertível preservando  $\mu$  e totalmente ergódica. Se  $W^{ss}$  absolutamente contínua em um conjunto com estrutura de produto  $V$  com  $\mu(V) > 0$ , então  $f$  é multiple mixing.*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(f^N(V) \cap V) > 0$ , então para  $f^N$  as hipóteses do Teorema 4.9 são satisfeitas, logo  $W^{ss}$  é ergódica, pelo Teorema 4.5  $f$  é multiple mixing. □

**Teorema 4.10.** *Seja  $(X, \mu)$  um espaço métrico separável com probabilidade Borel  $\mu$  com suporte  $\text{supp}(\mu) = \{x \in X : \mu(U) > 0, \text{ quando } x \in U, U \text{ aberto}\}$  conexo e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação invertível preservando  $\mu$ . Se  $W^{ss}$  é absolutamente contínua II nos conjuntos abertos com estrutura de produto que cobrem o  $\text{supp}(\mu)$ , então  $f^n$  é ergódica para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, portanto, multiple mixing pelo Corolário 4.2.*

*Demonstração.* Em virtude do Teorema 4.4, é suficiente mostrar que  $W^{ss}$  e  $W^{su}$  são conjuntamente ergódicas.

Seja  $\varphi \in L^2$ ,  $W^{ss}, W^{su}$ -saturada, vejamos que  $\varphi$  é constante em quase todo ponto.

Como  $\mu(X \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$ , é suficiente mostrar que  $\varphi$  é constante em  $\text{supp}(\mu)$ , dado que pela hipótese  $\text{supp}(\mu)$  é conexo, mostraremos que  $\varphi$  é localmente constante em quase todo ponto. Como  $\varphi$  é  $W^{ss}, W^{su}$ -saturada, existe  $G \subset X$  tal que  $\mu(G) = 1$  e se  $x, y \in G, y \in W^{ss}(x)$  então  $\varphi(y) = \varphi(x)$  e também  $y \in W^{su}(x)$  implica  $\varphi(y) = \varphi(x)$ .

Sejam  $x_0 \in G \cap \text{supp}(\mu)$  e  $V \subset X$  uma vizinhança aberta de  $x$  com estrutura de produto, vejamos que  $\varphi$  é constante em quase todo ponto de  $V$ .

Consideremos

$$G_0 = \left( \bigcup_{y \in W_{loc}^{ss}(x_0) \cap G} W_{loc}^{su}(y) \right) \cap G.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \mu(G_0 \cap V) &= \int_V \chi_{G_0} d\mu = \int_{W_{loc}^{ss}(y)} \int_{W_{loc}^{su}(x_0)} \chi_{G_0} d\mu_{x_0}^u d\mu_y^s(x_0) \\ &= \int_{W_{loc}^{ss}(y)} \int_{W_{loc}^{su}(x_0)} \chi_V d\mu_{x_0}^u d\mu_y^s(x_0) \\ &= \mu(V). \end{aligned}$$

Portanto,  $G_0$  tem medida total em  $V$ . Seja  $z \in G_0 \cap V$ , então existe  $y \in W_{loc}^{ss}(x_0) \cap G$  tal que  $z \in W_{loc}^{su}(y) \cap G$ , logo

$$\varphi(z) = \varphi(y) = \varphi(x_0).$$

Isto implica que  $\varphi$  é constante em quase todo ponto  $x \in V$ , logo  $\varphi$  é constante em quase todo ponto de  $\text{supp}(\mu)$ , como queríamos mostrar. Assim, obtemos que  $W^{ss}$  e  $W^{su}$  são conjuntamente ergódicos, pelo Teorema 4.4  $f$  é totalmente ergódica, assim, pelo Corolário 4.2  $f$  é multiple mixing.  $\square$

Obtemos como consequência direta do Teorema 4.10 um dos resultados principais que queríamos mostrar neste trabalho.

**Corolário 4.3.** *Difeomorfismos de Anosov de classe  $C^2$  preservando volume são ergódicos.*

Para provar o Teorema 4.9 usaremos os seguintes lemas:

**Lema 4.1.** *A continuidade absoluta II em  $V_f = f^{-1}(V) \cap V$  implica continuidade absoluta de  $T : V_f \rightarrow X$ ,  $x \mapsto T(x) := [f(x), x]$ , isto é,  $T_*\mu \ll \mu$ .*

*Demonstração.* Note que pela definição da aplicação  $T$  temos que  $T(V_f) \subset V$ , portanto, para mostrar  $T_*\mu \ll \mu$  podemos tomar  $N \subset V$  com  $\mu(N) = 0$ . Pela continuidade absoluta II de  $W^{ss}$  temos,

$$0 = \mu(N) = \int_V \chi_N d\mu = \int_{W_{loc}^{ss}(z)} \int_{W_{loc}^{su}(x)} \chi_N d\mu_x^u d\mu_z^s(x).$$

Assim, fixado  $z_0$ , existe  $E_0 \subset W_{loc}^{ss}(z_0)$  tal que  $\mu_{z_0}^{ss}(E_0) = 1$  e para todo  $x \in E_0$ ,  $\int_{W_{loc}^{su}(x)} \chi_N d\mu_x^u = 0$ .

Considere o conjunto  $W^{su}$ -saturado,  $E = \bigcup_{x \in E_0} W_{loc}^{su}(x)$ , note que

$$\mu(E) = \int_{W_{loc}^{ss}(x_0)} \int_{W_{loc}^{su}(y)} \chi_E d\mu_y^u d\mu_{x_0}^s(y) = \int_{W_{loc}^{ss}(x_0)} \chi_{E_0} d\mu_{x_0}^s = 1.$$

Seja  $x \in E$ , então existe  $x_0 \in E_0$  tal que  $x \in W_{loc}^{su}(x_0)$ , logo  $W_{loc}^{su}(x) = W_{loc}^{su}(x_0)$ , portanto,

$$\int_{W_{loc}^{su}(x_0)} \chi_N d\mu_{x_0}^u = 0 \text{ implica } \int_{W_{loc}^{su}(x)} \chi_N d\mu_x^u = 0.$$

Desde que  $\mu$  é invariante por  $f$ ,  $\mu_x^u(N)$  implica que  $\mu_{f^{-1}(x)}^u(f^{-1}(N)) = 0$ , logo pela continuidade absoluta, temos que  $\mu_x^u([f^{-1}(N), x]) = 0$ . Portanto,

$$\int_{W^{su}(x)} \chi_{T^{-1}(N)} d\mu_x^u = 0 \text{ para todo } z \in E.$$

Então, considerando  $N_W = V_f \setminus E$

$$\begin{aligned} (T_*\mu)(N) &= \int \chi_{T^{-1}(N)} d\mu = \int_{W_{loc}^{ss}(z) \setminus N_W} \int_{W_{loc}^{su}(x)} \chi_{T^{-1}(N)} d\mu_x^u d\mu_z^s + \int_{N_W} \chi_{T^{-1}(N)} d\mu \\ &= \int_{W_{loc}^{ss}(z) \setminus N_W} 0 d\mu_z^s(x) + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $(T_*\mu)(N) = 0$ , logo  $T_*\mu \ll \mu$ .  $\square$

Para cada  $x \in V_f \cap T^{-1}(V_f)$ , da definição de  $T$  temos que  $T(x) \in W^{su}(x)$ , portanto  $d(f^{-n}(x), f^{-n}(T(x))) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo pelo teorema de Egorov, existe  $U \subset V_f \cap T^{-1}(V_f)$  com  $\mu(U) > 0$  tal que  $d(f^{-n}, f^{-n} \circ T) \rightarrow 0$  uniformemente neste conjunto. Definamos

$$T_n(x) := \begin{cases} (f^{-n} \circ T \circ f^n)(x) & \text{se } x \in f^{-n}(U) \\ Id & \text{em outro caso,} \end{cases}$$

afirmamos que  $T_n$  converge pontualmente à identidade, de fato, seja  $x \in V_f$  e  $n \in \mathbb{N}$  grande tal que  $d(f^{-n}, f^{-n} \circ T)$  é suficientemente pequena. Se  $x \notin f^{-n}(U)$  então  $T_n(x) = x$ , se  $x \in f^{-n}(U)$ ,  $x = f^{-n}(y)$  para algum  $y \in U$ , então  $d(x, T_n(x)) = d(f^{-n}(y), f^{-n}(T(y)))$  é pequeno, o que implica que  $T_n(x) \rightarrow x$ , como afirmamos. Seja  $A$  mensurável

$$\begin{aligned} T_{n*}\mu(A) &= (f^{-n} \circ T \circ f^n)_*\mu(A) = \mu(f^{-n}(T^{-1}(f^n(A)))) = \mu(T^{-1}(f^n(A))) \\ &= T_*\mu(f^n(A)) = \int_{f^n(A)} g d\mu = \int_A g \circ f^n d\mu, \text{ onde } g := \left[ \frac{dT_*\mu}{d\mu} \right], \end{aligned}$$

assim, a derivada de Radon-Nikodym de  $T_n$  é  $g_n = \left[ \frac{dT_{n*}\mu}{d\mu} \right] = \left[ \frac{dT_*\mu}{d\mu} \right] \circ f^n$  em  $f^{-n}(U)$  e 1 em outro caso, mas isto implica que  $g_n$  é uniformemente integrável, de fato, seja  $L_n = \{x : g_n(x) > M\}$ , então

$$f^n(L_n) = \{f^n(x) : g_n(x) > M\} = \{y : g_n(f^{-n}(y)) > M\} = \{y : g(y) > M\}$$

Assim,

$$\int_{L_n} g_n d\mu = \int_{L_n} \left[ \frac{dT_*\mu}{d\mu} \right] \circ f^n d\mu = \int_{f^n(L_n)} \left[ \frac{dT_*\mu}{d\mu} \right] d\mu = \int_{\{y : g(y) > M\}} g d\mu.$$

**Lema 4.2.** *Seja  $X$  um espaço métrico com medida de probabilidade  $\mu$ .  $T_n : X \rightarrow X$  satisfazendo  $T_n \rightarrow Id$  em quase todo ponto,  $T_{n*}\mu \ll \mu$ , e  $g_n = \left[ \frac{dT_{n*}\mu}{d\mu} \right]$  uniformemente integrável. Se  $\varphi \in L^\infty$ , então  $\|\varphi \circ T_n - \varphi\|_1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Seja  $\psi$  contínua com  $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$ , então

$$\|\varphi \circ T_n - \varphi\|_1 \leq \|(\varphi - \psi) \circ T_n\|_1 + \|\psi \circ T_n - \psi\|_1 + \|\psi - \varphi\|_1.$$

Desde que  $T_n \rightarrow Id$  temos que  $\psi \circ T_n - \psi \rightarrow 0$ , logo como  $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$  pelo teorema da convergência dominada segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\psi \circ T_n - \varphi| d\mu = 0,$$

portanto  $\|\psi \circ T_n - \psi\|_1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Agora, para  $\varepsilon > 0$ , dado que  $g_n$  é uniformemente integrável existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$2\|\varphi\|_\infty \int_{g_n > M} g_n d\mu < \varepsilon/2.$$

Escolhamos  $\varphi \in L^\infty$  tal que  $\|\psi - \varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$ , então

$$\begin{aligned} \|(\varphi - \psi) \circ T_n\|_1 &= \int |\varphi - \psi| \circ T_n d\mu = \int |\varphi - \psi| \circ g_n d\mu \\ &\leq M\|\varphi - \psi\|_1 + 2\|\varphi\|_\infty \int_{g_n} g_n d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

*Demonstração do Teorema 4.9.* Seja  $\varphi \in L^\infty$ ,  $W^{ss}$ -saturada, precisamos mostrar que  $\varphi$  é constante. Seja  $G \subset X$ ,  $\mu(G) = 0$  tal que se  $x, y \in G$  e  $y \in W^{ss}(x)$  então  $\varphi(y) = \varphi(x)$ . Note que para mostrar que  $\varphi$  é constante é suficiente mostrar que  $\varphi$  é invariante por  $f$ , pois  $f$  é ergódica.

Seja  $\varepsilon > 0$ , vamos mostrar que  $\mu(\{x \in X : |\varphi(f(x)) - \varphi(x)| > \varepsilon\}) = 0$ . Temos que para todo  $x \in G \cap f^{-n} T_n(x) \in W^{ss}(f(x))$ , de fato, existe  $y \in U$  tal que  $f^{-n}(y) = x$ , logo

$$T_n(x) = f^{-n}(T(f^n(x))) = f^{-n}(T(y)) = f^{-n}([f(y), y]) \in f^{-n}(W^{ss}(f(y)) \cap W^{su}(y)),$$

portanto, como  $\varphi$  é  $W^{ss}$  saturada  $\varphi(T_n(x)) = \varphi(f(x))$ , então

$$\mu(f^{-n}(U) \cap \{x \in G : |\varphi(f(x)) - \varphi(x)| > \varepsilon\}) = \mu(f^{-n}(U) \cap \{x \in G : |\varphi(T_n(x)) - \varphi(x)| > \varepsilon\})$$

Pelo Lema 4.2 esta medida converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja  $B := \{x \in G : |\varphi(f(x)) - \varphi(x)| > \varepsilon\}$ . Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U \circ f^{-k}(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) \text{ para quase todo ponto } x \in X.$$

Dado que  $\tilde{\varphi}$  é invariante por  $f$ , segue da ergodicidade de  $f$  que

$$\tilde{\varphi}(x) = \int \chi_U(x) d\mu = \mu(U),$$

isto é,  $\tilde{\varphi}$  é constante. Assim,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U \circ f^{-k} \xrightarrow{L^2} \mu(U), \text{ portanto, } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U \circ f^{-k} \cdot \chi_B \xrightarrow{L^2} \mu(U)\chi_B.$$

Note que  $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U \circ f^{-k} \cdot \chi_B \right| \leq 1$ , logo pelo Teorema da convergência dominada temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U \circ f^{-k} \cdot \chi_B d\mu = \int \mu(U)\chi_B d\mu = \mu(U)\mu(B).$$

De outro lado temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U \circ f^{-k} \cdot \chi_B d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int \chi_U \circ f^{-k} \cdot \chi_B d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(f^{-k}(U) \cap B) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(f^{-k}(U) \cap \{x \in G : |\varphi(f(x)) - \varphi(x)| > \varepsilon\}) = 0, \end{aligned}$$

dado que  $\mu(U) > 0$ , implica que  $\mu(B) = 0$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, segue que  $\varphi$  é invariante por  $f$ , como  $f$  é ergódica implica que  $\varphi$  é constante, como queríamos mostrar, portanto  $W^{ss}$  é ergódica.  $\square$

# Referências

- [1] ANOSOV, D. V. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967). Translated from the Russian by S. Feder. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [2] BARREIRA, L., AND VALLS, C. *Dynamical systems*. Universitext. Springer, London, 2013. An introduction, Translated from the 2012 Portuguese original.
- [3] CAMACHO, C., AND LINS NETO, A. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [4] COUDÈNE, Y. On invariant distributions and mixing. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 27, 1 (2007), 109–112.
- [5] COUDÈNE, Y. *Ergodic theory and dynamical systems*. Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, [Les Ulis], 2016. Translated from the 2013 French original [MR3184308] by Reinie Ern e.
- [6] COUDÈNE, Y., HASSELBLATT, B., AND TROUBETZKOY, S. Multiple mixing from weak hyperbolicity by hopf argument. *World Scientific* 16, 2 (2016), 15.
- [7] HOPF, E. Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* 91 (1939), 261–304.
- [8] KATOK, A., AND HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [9] KOSINSKI, A. A. *Differential manifolds*, vol. 138 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.
- [10] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.
- [11] MILNOR, J. Fubini foiled: Katok’s paradoxical example in measure theory. *Math. Intelligencer* 19, 2 (1997), 30–32.
- [12] PONCE, G., AND VARÃO, R. *An introduction to the Kolmogorov-Bernoulli equivalence*,. Springer, 2018.

- 
- [13] PUGH, C., AND SHUB, M. Ergodicity of Anosov actions. *Invent. Math.* 15 (1972), 1–23.
- [14] ROBINSON, C., AND YOUNG, L. Nonabsolutely continuous foliations for an anosov diffeomorphism. *Invent Math* (1980).
- [15] SCHWARTZ, J. T. *Differential Geometry and topology*. New York: Gordon and Breach, 1968.
- [16] VIANA, M., AND OLIVEIRA, K. *Foundations of ergodic theory*, vol. 151 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.