# Topologia Geral - MA/MM 453 - Segunda Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

RA:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**Instruções:**

- ATENÇÃO: Faça PELO MENOS UMA questão da parte B desta avaliação;
- Coloque o seu RA em **TODAS** as folhas;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Esta avaliação é individual e não é permitido o uso de qualquer tipo de material de consulta. Tentativas, bem sucedidas ou não, de cola implicarão na reprovação do(a) aluno(a), segundo explicitado no plano da disciplina;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu.

Questões escolhidas:

---

**Problema 1:**

a) (1.5) Seja $X$ um espaço topológico e $A \subset X$. Mostre que se $C$ é um subespaço conexo de $X$ com
$$A \cap C \neq \emptyset \quad \text{e} \quad (X - A) \cap C \neq \emptyset,$$
então
$$C \cap \partial A \neq \emptyset.$$

b) (1.0) Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ o cilindro dado por
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$
e $V$ o cone (de duas folhas)
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}.$$
Prove, de forma sucinta, que $C$ e $V$ não são homeomorfos.

**Problema 2:**

a) (1.5) Seja $X$ um espaço localmente conexo por caminhos. Mostre que se $A \subset X$ é um aberto conexo então $A$ é conexo por caminhos.

b) (1.0) Mostre que todo aberto conexo em $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.

**Problema 3:** (2.5) Mostre que se $X$ é Hausdorff e $F, G \subset X$ são compactos disjuntos, existem abertos $U, V \subset X$ tais que

$$F \subset U,\ G \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

**Problema 4:**

a) (1.5) Mostre que se $X$ é um espaço métrico separável então $X$ é segundo enumerável (ou seja $E_2$).

b) (1.0) Considere $l^2$ o espaço de todas as sequências onde cada termo é 0 ou 1, ou seja,

$$l^2 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\}\}.$$

Considere $d : l^2 \times l^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Mostre que $(l^2, d)$ é um espaço métrico não separável.
*Observação: Neste problema não é necessário mostrar que $d$ é métrica, pode assumir tal fato.*

---

**Problemas parte B**

**Problema 5:** (2.5) Seja $X$ um espaço regular com base enumerável, mostre que $X$ é normal.

**Problema 6:**

a) (1.25) Enuncie o Lema de Urysohn.

b) (1.25) Demonstre o Teorema de metrização de Urysohn: Todo espaço topológico regular e segundo enumerável é metrizável.