Matemática IV 2019- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) : $\sqrt{-1}$

1	2	3	4	5	6	Total

Instruções:

- **Horário de início: 8:00h   Horário de encerramento: 9:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos a avaliação será anulada;
- Coloque o RA (sem nome) em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções, lembre-se que a escrita e a justificativa dos valores calculados fazem parte da nota atribuída à solução;
- Respostas sem justificativa não serão consideradas;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

Resolva o problema 1.

Problema 1:

a) (1.5) Seja $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$. Determine z^{2019}.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$.

b) (1.0) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que:

$$|c - a| = |c - b| = \frac{|a - b|}{2}.$$

Prove que, para todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ temos:

$$|z - a| \cdot |z - b| \geq \left(|z - c| - \frac{|a - b|}{2} \right)^2$$

Escolha DOIS dentre os problemas $3 - 5$.

Problema 3:

a) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to \infty} \frac{2019 \cdot z^2 + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|z|}\right)}{3 \cdot z^2 + 2019}.$$

b) (1.0) Mostre que não existe

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z} + \operatorname{Re}(z)}{z}.$$

c) (0.5) Calcule

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^2 + z(i - 1) - i}{(z - 1)(z + 1)}.$$

Problema 4: (2.5) Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas e $z_0 \in \mathbb{C}$, suponha que exista um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0. Mostre que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ então

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

Problema 5: (2.5) Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1, \mathrm{Im}(z) > 1\}$, considere a função $f : S \to \mathbb{C}$ dada por

$$z = x + iy, \qquad f(z) = -\frac{x^2}{1+y^2} + i \cdot \left(\frac{y^2}{1+x^2}\right).$$

Determine todos os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Resolva o problema 6.

Problema 6. Calcule

1) (2.0) $\mathrm{V.\,P.}(1-i)^{1+i}$, onde "V.P." denota o valor principal;

2) (0.5) $|\,\mathrm{V.\,P.}(1-i)^{1+i}|$.

Boa Prova!!

Soluções

Problema 1:

a) Seja $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$, então $|z| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$ (Calculou corretamente o módulo: 0,25).

Logo,

$$z = 2 \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos(\pi/3) = 1/2$ e $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ então temos

$$z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} \quad \text{(Exibiu corretamente a forma polar: 0,75).}$$

Assim,

$$z^{2019} = (2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}})^{2019} = 2^{2019} \cdot e^{i \cdot \frac{2019\pi}{3}} = 2^{2019} \cdot e^{i \cdot 673\pi}.$$

Mas observe que

$$e^{i \cdot 673\pi} = e^{i \cdot 672\pi} \cdot e^{i \cdot \pi} = 1 \cdot -1 = -1.$$

Logo,

$$z^{2019} = -2^{2019} \qquad \text{(Contas e conclusão: 0,5).}$$

b) Primeiramente observemos que:

$$|z - a| = |(z - c) + (c - a)|, \quad |z - b| = |(z - c) + (c - b)| \qquad (0{,}25).$$

Assim, pela desigualdade triângular temos:

- $|z - a| = |(z - c) + (c - a)| \geq |z - c| - |c - a| = |z - c| - \frac{|a-b|}{2}$; (0,25)
- $|z - b| = |(z - c) + (c - b)| \geq |z - c| - |c - b| = |z - c| - \frac{|a-b|}{2}$. (0,25)

Portanto,

$$|(z - a)(z - b)| = |z - a||z - b| \geq \left(|z - c| - \frac{|a - b|}{2}\right)^2, \quad (0{,}25)$$

como queríamos demonstrar.

Problema 3:

a) Considere $f(z) := \frac{2019 \cdot z^2 + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|z|}\right)}{3z^2 + 2019}$. Por um teorema visto em sala sabemos que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w. \quad \text{Citou o teorema corretamente: 0.2}$$

Basta então calcular $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{\frac{2019}{z^2}+i\cdot\operatorname{sen}(|z|)}{\frac{3}{z^2}+2019}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{2019+i\cdot z^2\cdot\operatorname{sen}(|z|)}{3+2019\cdot z^2}\\ &= \frac{2019+i\cdot 0^2\cdot\operatorname{sen}(0)}{3+2019\cdot 0^2} \qquad (\text{Efetuou estes limites corretamente: 0,8})\\ &= \frac{2019}{3}.\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema mencionado, concluimos que o limite dado é igual a 673.

b) Tomaremos duas formas de convergência a 0 que nos dariam valores diferentes para o limite. Consideremos $z \to 0$ pelo eixo real, ou seja, $z = x + iy$ com $y = 0$ e $x \to 0$. Neste caso temos $z = x$ e ,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}+\operatorname{Re}(z)}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x}{x} = 2. \quad (\text{Exibiu o caminho corretamente e calculou o limite: 0,5})$$

Consideremos agora $z \to 0$ pelo eixo imaginário, ou seja, $z = iy$ com $y \to 0$. Neste caso,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}+\operatorname{Re}(z)}{z} = \lim_{y\to 0}\frac{-iy+0}{iy} = -1. \quad (\text{Exibiu o caminho corretamente e calculou o limite: 0,5})$$

Como ambas as formas de convergência geraram resultados distintos pode-se concluir que o limite não existe. □

c) Observe que ao calcularmos o polinômio "de cima" $z^2 + z(i-1) - i$ em $z = 1$ obtemos: $1^2 + 1\cdot(i-1) - i = 1 + i - 1 - i = 0$. Isto significa que o polinômio de cima é divisível por $z - 1$. De fato, observe que:

$$z^2 + z(i-1) - i = (z-1)(z+i). \quad (\text{Fatoração correta: 0,25})$$

Assim,

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z(i-1)-i}{(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+i)}{(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{z+i}{z+1} = \frac{1}{2}(1+i). \quad (\text{Conclusão: 0,25})$$

Problema 4.
Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)g(z) - 0| < \varepsilon.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer e considere V a vizinhança de z_0 na qual $|g(z)| \leq M$, $\forall z \in V$ (Discriminou a vizinhança onde a limitação de g ocorre: 0,5).

Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}. \quad \text{(Definição usada corretamente: 1.0).}$$

Como $z_0 \in V$, existe δ_1 tal que $B(z_0, \delta_1) \subset V$. Tome $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. (Tomou o mínimo dos δ's: 0,5) Assim, se $0 < |z - z_0| < \delta$ então $|g(z)| \leq M$ e $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}$, logo

$$|f(z) \cdot g(z)| = |f(z)||g(z)| \leq |f(z)| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon. \quad \text{(Concluiu corretamente: 0,5)}$$

Logo $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0$ como queríamos demonstrar. □

Problema 5.
Seja $f(x+iy) = -\frac{x^2}{1+y^2} + i \cdot \left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$, então $u(x,y) = -\frac{x^2}{1+y^2}$ e $v(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}$. Observe que u e v são diferenciáveis em qualquer ponto (x,y) pois são frações de dois polinômios onde o de baixo não se anula já que $1 + x^2 \geq 1$ e $1 + y^2 \geq 1$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Assim as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y existem em todos os pontos do domínio de f e são dadas por:

$$u_x = -\frac{2x}{1+y^2}, \quad u_y = \frac{2x^2 \cdot y}{(1+y^2)^2}, \quad v_x = \frac{-2xy^2}{(1+x^2)^2}, \quad v_y = \frac{2y}{1+x^2}$$

(Calcular as derivadas parciais corretamente: 0,5)

que também são contínuas em qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pois são frações de polinômios em x e y que não se anulam. (Observar que as derivadas parciais existem e são contínuas em todo ponto: 0,5)

Finalmente, pelo Teorema de condições suficientes para derivabilidade para verificar a derivabilidade de f em um ponto (x,y) basta então verificarmos em quais pontos as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Se

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x$$

então
$$-\frac{2x}{1+y^2} = \frac{2y}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \frac{2x^2 \cdot y}{(1+y^2)^2} = -\frac{-2xy^2}{(1+x^2)^2}.$$

(Colocar corretamente as equações de Cauchy Riemann: 0,75)

A primeira igualdade nos dá
$$-x(1+x^2) = y(1+y^2). \tag{0.1}$$

Agora, como $\text{Re}(z) > 1, \text{Im}(z) > 1$ então $x \neq 0$ e $y \neq 0$, logo a segunda equação nos dá:
$$x(1+x^2)^2 = y(1+y^2)^2.$$

Usando (0.1) nesta última equação temos:
$$x(1+x^2)^2 = y(1+y^2)^2 \Rightarrow -y(1+y^2)(1+x^2) = y(1+y^2)^2 \Rightarrow -1-x^2 = 1+y^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 = -2,$$
absurdo uma vez que $x^2+y^2 \geq 0$. (Resolver e concluir: 0,75)

Portanto, f não é derivável em nenhum ponto de seu domínio.

Problema 6. a) Primeiramente lembremos que, por definição temos:
$$V.P.(1-i)^{1+i} = e^{(1+i)\,\text{Log}(1-i)}. \quad (0{,}5)$$

Além disso, dado $z \in \mathbb{C}$ sabemos que
$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z).$$

Seja $z = 1-i$ temos $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ e portanto $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right)$. Logo,
$$z = \sqrt{2} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}. \quad (0{,}5)$$

Como
$$-\pi < -\frac{\pi}{4} \leq \pi$$
segue que $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4}$. Assim,
$$\text{Log}(1-i) = \ln\sqrt{2} - i \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 - i \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (0{,}5)$$

Substituindo na expressão inicial segue que:

$$
\begin{aligned}
V.P.(1-i)^{1+i} &= e^{(1+i)\,\mathrm{Log}(1-i)} \\
&= e^{(1+i)\left(\frac{1}{2}\ln 2 - i\cdot\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + i\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right)}.
\end{aligned}
$$

(Conclusão correta: 0,5)

b) Pela alternativa (a), a forma polar de $V.P.(1-i)^{1+i}$ é

$$e^{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Portanto o módulo deste valor é:

$$|\,\mathrm{V.\,P.}(1-i)^{1+i}| = e^{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}}.$$

(Apontou, com justificativa, o valor do módulo corretamente: 0,5).