Topologia Geral - MA/MM 453 - Primeira Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

RA:

1	2	3	4	5	6	7	Total

Instruções:

- ATENÇÃO: Faça PELO MENOS DUAS questões da parte B desta avaliação;
- Coloque o seu RA em **TODAS** as folhas;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Esta avaliação é individual e não é permitido o uso de qualquer tipo de material de consulta. Tentativas, bem sucedidas ou não, de cola implicarão na reprovação do(a) aluno(a), segundo explicitado no plano da disciplina;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu. No caso de haver escolha de mais de 3 questões dentre as questões $1-4$, serão corrigidas apenas as 3 primeiras indicadas. Analogamente, caso sejam feitas mais de 5 questões, serão corrigidas apenas as 3 primeiras da primeira parte e as 2 primeiras da parte B.

Questões escolhidas:

Problema 1: Sejam τ_α, $\alpha \in \Lambda$, topologias em X.

a) (1.0) Mostre que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$ é uma topologia em X.

b) (1.0) Pode-se dizer o mesmo de $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$?

Problema 2: Seja X um espaço topológico, dado $A \subset X$ definimos a fronteira de A, denotada por ∂A, pela equação:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

a) (1.0) Mostre que $\mathrm{Int}(A)$ e ∂A são disjuntos e $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$.

b) (0.5) Mostre que $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ é aberto e fechado (ou seja, se A é Feberto =))

c) (0.5) Mostre que U é aberto $\Leftrightarrow \partial U \cap U = \emptyset$.

Problema 3: Considere $\mathbb{R}[x]$ o conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais na variável x. Dado um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$ qualquer, defina

$$U_f := \{y : \quad P(y) \neq 0\}.$$

a) (0.5) Mostre que a família $\mathcal{B} := \{U_P\}_{P\in\mathbb{R}[x]}$ constitui uma base para uma topologia em $\mathbb{R}$.

b) (0.5) Mostre que $\mathbb{R}$ munido da topologia τ gerada pela base $\mathcal{B}$ não é um espaço de Hausdorff.

c) (0.5) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto com infinitos elementos qualquer, prove que, na topologia τ, temos $\overline{A} = \mathbb{R}$.

d) (0.5) Conclua que, na topologia τ, temos $\overline{\{p : \quad p \text{ é número primo }\}} = \mathbb{R}$.

Problema 4: Considere X um espaço topológico e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais munido da topologia usual.

a) (0.5) Mostre que X é espaço de Hausdorff se, e somente se, $\Delta := \{(x,x) : \quad x \in X\}$ é um subconjunto fechado de $X \times X$.

b) (1.0) Um subconjunto $A \subset X$ é dito denso em X se $\overline{A} = X$. Sejam A um subconjunto denso em X e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas mostre que se

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in A,$$

então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

c) (0.5) Dê um exemplo de uma tripla (X, A, f) onde:

c.1) X é um espaço topológico,

c.2) $A \subset X$ é denso em X e

c.3) $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua (onde A está munido da topologia de subespaço) que não pode ser estendida para X, ou seja, não existe nenhuma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ de forma que

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

Problemas parte B

Problema 5: Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família indexada de espaços topológicos.

a) (1.0) Defina a topologia box e a topologia produto em $\prod X_\alpha$.
Obs: caso você apresente uma base/subbase para tais topologias é necessário demostrar que tais famílias são de fato uma base/subbase

b) (1.0) Mostre que $\mathbb{R}^w$ não é metrizável na topologia box mas é metrizável na topologia produto.

Problema 6:

a) (0.5) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família indexada de espaços topológicos e sejam $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta \in J$, as projeções onde $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ está munido da topologia produto. Sejam $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ funções, mostre que a função $f : Y \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ definida por

$$f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha\in J}$$

é contínua se, e somente se, $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ for contínua para todo $\alpha \in J$.

b) (0.5) Mostre que a afirmação da alternativa (a) não é verdadeira na topologia box.

c) (1.0) Dada uma sequência $(a_1, a_2, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots)$ de números reais com $a_i > 0$ para todo i, defina $h : \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^w$ por

$$h((x_1, x_2, \ldots)) = (a_1x_1 + b_1,\ a_2x_2 + b_2,\ \ldots).$$

Mostre que se $\mathbb{R}^w$ estiver munido da topologia produto h será um homeomorfismo.

Problema 7: (2.5) Considere $I = [0, 2] \subset \mathbb{R}$ munido da topologia induzida. Defina em I a relação de equivalência "$\sim$" dada por:

$$x \sim y \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x, y \in \{0, 1, 2\}.$$

Ou seja, a relação "$\sim$" está colapsando os pontos 0, 1 e 2. Mostre que o espaço I^* formado pelas classes de equivalência desta relação é homeomorfo a

$$C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{R}^2$$

onde $C_1 = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ e $C_2 = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$. O espaço I^* é um espaço de Hausdorff ?