Matemática IV - MA 044
Quinta Lista - Parte 1

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Seja $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função dada por $w(t) = u(t) + iv(t)$. Suponha que u e v sejam funções diferenciáveis. Mostre que

a) $\frac{d}{dt} w(-t) = -w'(t)$;

b) $\frac{d}{dt}[w(t)]^2 = 2w(t)w'(t)$.

2. Calcule:

a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$;

b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$;

c) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$, onde z é um complexo fixo com $Re(z) > 0$.

3. Mostre que se m e n são inteiros então

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad \text{quando } m \neq n$$

e

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = 2\pi \quad \text{quando } m = n.$$

4. O objetivo deste problema será mostrar como calcular certas integrais reais utilizando integrais complexas.

a) Calcule a integral

$$\int_0^\pi e^{(1+i)x} dx$$

utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para funções a valores complexos.

b) Pela definição de integrais de funções de variável real a valores complexos, sabemos que

$$\int_0^\pi e^{(1+i)x} dx = \int_0^\pi e^x \cos x \; dx + i \int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x \; dx.$$

Utilize o resultado da parte (a) para concluir quais são os valores das integrais que aparecem à direita na equação acima.

5. Mostre que se $w(t) = u(t) + iv(t)$ é contínua no intervalo $a \leq t \leq b$, então

a) $\int_{-a}^{-b} w(-t)dt = \int_a^b w(\tau)d\tau$;

b) seja $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ uma função diferenciável tal que $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ e $\phi'(\tau) > 0$ então

$$\int_a^b w(t)dt = \int_\alpha^\beta w(\phi(\tau))\phi'(\tau)d\tau.$$

Dica: Essas expressões podem ser obtidas utilizando as propriedades equivalentes para funções reais.

6. Suponha que uma função $f(z)$ é analítica em um ponto $z_0 = z(t_0)$ de um arco suave $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Mostre que se $w(t) = f(z(t))$, então

$$w'(t) = f'(z(t))z'(t)$$

quando $t = t_0$.

Para os exercícios 7-YY, dada uma função f e um contorno C, use parametrizações de C, ou pedaços de C, para calcular

$$\int_C f(z)dz.$$

7. $f(z) = (z + 2)/z$ e C é :

a) o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, $(0 \leq \leq \pi)$;

b) o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$;

c) o círculo $z = 2e^{i\theta}$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

8. $f(z) = z - 1$ e C é o arco de $z = 0$ a $z = 2$ consistindo do

a) semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}$, $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$;

b) segmento $z = x$, $(0 \leq x \leq 2)$ do eixo real.

9. $f(z) = \pi \exp(\pi \bar{z})$ e C é a fronteira do quadrado com vértices nos pontos $0, 1, 1 + i$ e i orientado no sentido anti-horário.

10. $f(z)$ é definida em termos da equação

$$f(z) = 1 \quad \text{quando } y < 0, \quad \text{e} \quad f(z) = 4y \quad \text{quando } y > 0,$$

e C é o arco de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$ ao longo da curva $y = x^3$.

11. $f(z) = 1$ e C é um contorno arbitrário de um certo ponto z_1 a um certo ponto z_2 no plano complexo.