Topologia Geral - MA/MM 453
Lista 3

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Topologia produto e topologia das caixas (topologia box)

1. Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência de pontos de um espaço produto $\prod X_\alpha$. Mostre que esta sequência converge para o ponto x se, e somente se, a sequência $\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \ldots$, converge para $\pi_\alpha(x)$ para cada α. Este fato continua verdadeiro na topologia box?

2. Considere $\mathbb{R}^\infty$ o conjunto de todas as sequências em $\mathbb{R}^w$ com apenas um número finito de coordenadas não nulas. Determine $\overline{\mathbb{R}^\infty}$ tanto na topologia box quanto na topologia produto.

3. Dada uma sequência $(a_1, a_2, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots)$ de números reais com $a_i > 0$ para todo i, defina $h : \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^w$ por

$$h((x_1, x_2, \ldots)) = (a_1 x + b_1,\ a_2 x_2 + b_2,\ \ldots).$$

Mostre que se $\mathbb{R}^w$ estiver munido da topologia produto h será um homeomorfismo de $\mathbb{R}^w$ com ele mesmo. O que ocorre se $\mathbb{R}^w$ estiver munido da topologia box?

4. O seguinte princípio é conhecido como axioma da escolha:

Axioma da escolha: Dada uma coleção $\mathcal{A}$ de conjuntos **disjuntos e não vazios**, existe um conjunto C consistindo de exatamente um elemento de cada elemento de $\mathcal{A}$; isto é, um conjunto C tal que C está contido na união dos elementos de $\mathcal{A}$, e para cada $A \in \mathcal{A}$ tem-se $C \cap A$ é um conjunto unitário.

Mostre que o axioma da escolha é equivalente à seguinte afirmação: para qualquer família indexada de conjuntos não-vazios $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ (não necessariamente disjuntos), com $J \neq 0$, o produto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

é não vazio.

5. Seja A um conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de espaços e seja $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de funções $f_\alpha : A \to X_\alpha$.

1) Mostre que existe uma única topologia mais grossa τ em A relativamente à qual todas as aplicação f_α são contínuas.

2) Seja
$$\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) : \ U_\beta \quad \text{é aberto em} \ \ X_\beta\},$$
e considere $\mathcal{S} := \bigcup \mathcal{S}_\beta$. Mostre que $\mathcal{S}$ é uma subbase para τ.

3) Mostre que a função $g : Y \to A$ é contínua relativamente a τ se, e somente se, cada função $f_\alpha \circ g$.

4) Seja $f : A \to \prod X_\alpha$ definida pela equação
$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}.$$
Mostre que a imagem de cada elemento de τ por f é um subconjunto aberto de $f(A)$ onde $f(A)$ está munido com a topologia induzida por $\prod X_\alpha$.

6. Seja X um espaço topológico, considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas, mostre que as funções:
$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g$$
são contínuas e que, se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ então f/g também será contínua.

2 Topologia quociente

7. Sejam X, Y espaços topológicos. Defina o que significa dizer que uma aplicação $p : X \to Y$ é uma aplicação quociente.

noindent 8. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente e $A \subset X$ um subespaço, é verdade que a restrição de p dada por:
$$p_{|A} : A \to p(A)$$
é uma aplicação quociente?

9. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente e seja A um subespaço de X que é saturado com respeito a p. Seja $q : A \to p(A)$ a restrição de p a A mostre que:

1) se A for aberto ou fechado em X então q será uma aplicação quociente.

2) se p for uma aplicação aberta ou fechada então q será uma aplicação quociente.

10.

a) Seja $p : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se existir uma função contínua $f : Y \to X$ tal que $p \circ f$ é a função identidade em Y, então p será uma aplicação quociente.

b) Se $A \subset X$, uma retração de X sobre A é uma aplicação contínua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Mostre que uma retração é uma aplicação quociente.

11. Seja $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada. Seja A o subespaço de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ consistindo de todos os pontos (x, y) para os quais ou $x \geq 0$ ou $y = 0$ (ou ambos); seja $q : A \to \mathbb{R}$ a restrição de p a A. Mostre que q é uma aplicação quociente que não é nem aberta e nem fechada.

12. Dê um exemplo de uma aplicação quociente $p : X \to Y$ de forma que $p \times p : X \times X \to Y \times Y$ definida por:

$$(p \times p)(x, y) = (p(x), p(y)),$$

não seja uma aplicação quociente.