Topologia Geral - MA/MM 453
Lista 2

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Conjuntos fechados, fecho e pontos de acumulação

1. Mostre que se A for fechado em X e B for fechado em Y então $A \times B$ será fechado em $X \times Y$.

2. Mostre que se U é aberto em X e A é fechado em X então $U - A$ é aberto em X.

3. Sejam A, B e A_α subespaços de um espaço X. Prove que:

1) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$, e dê um exemplo onde a inclusão é estrita.

4. Sejam A, B, A_α, $\alpha \in J$, subconjuntos de um espaço topológico X. Determine se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa, demonstrando ou dando um contra-exemplo. Além disso, em cada caso indique se uma das continências ocorre:

( ) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

( ) $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \overline{A_\alpha}$;

( ) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$.

5. Sejam $A \subset X$, $B \subset Y$, mostre que no espaço $X \times Y$ temos:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

6. Mostre que X é espaço de Hausdorff se, e somente se, $\Delta := \{(x, x) : \quad x \in X\} \subset\in X \times X$ é fechado.

7. Mostre que um espaço topológico X satisfaz o axioma T_1 se, e somente se, para quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existem abertos U_x e U_y tais que:

$$x \in U_x,\ y \in U_y \quad \text{e} \quad x \notin U_y, y \notin U_x.$$

Dê um exemplo de um espaço T_1 que não é Hausdorff.

8. Seja X um espaço topológico, dado $A \subset X$ definimos a fronteira de A, denotada por ∂A, pela equação:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

a) Mostre que $\mathrm{Int}(A)$ e ∂A são disjuntos e $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$.

b) Mostre que $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ é aberto e fechado (ou seja, se A for Feberto =))

c) Mostre que U é aberto $\Leftrightarrow \partial U = \overline{U} - U$.

d) Se U é aberto, é verdade que $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$? Justifique.

9. Determine o interior e a fronteira de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

1) $L := \{(x, y) :\ x \in \mathbb{Q}\}$.

2) $M := \{(x, y) :\ 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$.

3) $N := \{(x, y) :\ x \neq 0 \ \text{ e } \ y \leq 1/x\}$.

10. Demonstre o Teorema de Kuratowski: Considere a coleção de todos os subconjuntos A de um espaço topológico X. As operações de fecho $A \mapsto \overline{A}$ e de complemento $A \mapsto X - A$ são funções definidas nesta família.

a) Mostre que começando com um conjunto A qualquer, pode-se obter no máximo 14 conjuntos distintos através da aplicação sucessiva dessas funções.

b) Encontre um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ (na topologia usual) para o qual este máximo de 14 conjuntos distintos é atingido.

2 Funções contínuas

11. Seja $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$, mostre que a função

$$f : [0,1) \to S^1$$

dada por

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

é contínua e bijetora mas não é um homeomorfismo.

12. Uma função $f : X \to Y$ é chamada de um mergulho topológico se f for contínua, injetiva e $f : X \to f(X)$ for um homeomorfismo quando considerarmos Z como subespaço de Y. Mostre que a função

$$g : [0,1) \to \mathbb{R}^2$$

dada por

$$g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

é contínua e injetora mas não é um mergulho topológico.

13. Seja $f : A \to X \times Y$ dada pela equação

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

onde $f_1 : A \to X$, $f_2 : A \to Y$. Mostre que f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas.

14. Dados $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, mostre que as funções $f : X \to X \times Y$ e $g : Y \to X \times Y$ definida por:

$$f(x) = (x, y_0), \quad g(x) = (x_0, y)$$

são mergulhos.

14. Encontre uma função que seja contínua em apenas um ponto.

15. Seja Y um conjunto ordenado e com a topologia da ordem. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas.

a) Mostre que o conjunto $\{x : \ f(x) \leq g(x)\}$ é fechado em X.

b) Seja $h(x) := \min\{f(x), g(x)\}$, mostre que h é contínua.

16. Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções contínuas. Consideremos a função $(f,g) : A \times C \to B \times D$ definida por:

$$(f,g)(a,c) := (f(a), g(c)).$$

Mostre que (f, g) é contínua.

17. Seja $A \subset X$, considere $f : A \to Y$ contínua e Y um espaço de Hausdorff. Mostre que se f puder ser estendida a uma função contínua $g : \overline{A} \to Y$ então g estará unicamente determinada. Ou seja, mostre que existe no máximo uma função contínua $g : \overline{A} \to Y$ satisfazendo:

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$