Topologia Geral - MA/MM 453
Lista 1

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Revisão de Ordenação

1. Defina

a) Relação de ordem (Pg. 22 Munkres);

b) Ordem lexicográfica (ou "Dictionary order relation" Pg. 24 Munkres);

c) Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem $<$. Seja $A_0 \subset A$, defina o que é um **maior elemento** e um **menor elemento** de A_0;

d) Seja A um conjunto ordenado pela relação de ordem $<$. Seja $A_0 \subset A$, defina o que significa dizer que:

- A_0 é limitado superiormente;
- A_0 é limitado inferiormente;
- α é o supremo de A_0 (denotado usualmente por $\sup A_0$);
- β é o ínfimo de A_0 (denotado usualmente por $\inf A_0$).

e) Defina o que significa um conjunto ordenado possuir:

- a propriedade do menor limitante superior;
- a propriedade do maior limitante inferior.

2. Mostre que se um conjunto ordenado A possui a propriedade do menor limitante superior, então A também possui a propriedade do maior limitante inferior.

Definição 1.1 *Sejam A e B dois conjuntos ordenados com relações de ordem $<_A$ e $<_B$ respectivamente. Dizemos que A e B tem o mesmo **tipo de ordem** se existe uma bijeção $f : A \to B$ que preserva a ordem, ou seja,*

$$a_1 <_A a_2 \Rightarrow f(a_1) <_B f(a_2).$$

3. Seja $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos interior positivos. Considere as seguintes relações de ordem em $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$:

i) a ordem lexicográfica;

ii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ se

- $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$ ou
- $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ e $y_0 < y_1$.

iii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ se

- $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$ ou
- $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ e $y_0 < y_1$.

O conjunto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, em cada uma destas ordens, possui um menor elemento? Mostre que as três relações de ordem são de tipos diferentes.

2 Espaços topológicos, bases, comparação de topologias

4. Seja X um espaço topológico; seja $A \subset X$. Suponha que para cada $x \in A$ existe um aberto U de X com

$$x \in U \subset A.$$

Prove que A é aberto em X.

5. Em um espaço X considere a família de conjuntos

$$\tau_\infty := \{U | X - U \text{ é infinito, vazio ou todo o } X\}.$$

Tal família é uma topologia?

6.

a) Sejam τ_α, $\alpha \in \Lambda$, topologias em X mostre que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$ é uma topologia em X. Pode-se dizer o mesmo de $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \tau_\alpha$?

b) Seja $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de topologias em X, mostre que existe uma única menor topologia em X que contém todas as topologias τ_α, e que existe uma única maior topologia em X contida em todas as τ_α.

c) Se $X = \{a, b, c\}$, tome

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}, \quad \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Determine a menor topologia contendo τ_1 e τ_2. Determine a maior topologia contida em τ_1 e em τ_2.

7. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma base para uma topologia τ em X, então τ é igual a interseção de todas as topologias em X que contém $\mathcal{A}$. Prove o mesmo para o caso onde $\mathcal{A}$ é uma subbase apenas.

Seja X um conjunto munido de uma relação de ordem $<$, dados $a, b \in X$ com $a < b$, temos os seguintes conjuntos naturalmente definidos em X:

- $(a, b) := \{x |\ a < x < b\}$, chamado intervalo aberto em X;
- $[a, b) := \{x |\ a \leq x < b\}$ e $(a, b] := \{x |\ a < x \leq b\}$, chamados intervalos semi-abertos em X;
- $[a, b] := \{x |\ a \leq x \leq b\}$, chamado intervalo fechado em X.

Se X possuir mais do que um elemento podemos considerar a família $\mathcal{B}$ de todos os subconjuntos de X das seguintes formas:

- todos os intervalos abertos (a, b) de X;
- todos os intervalos semi-abertos $[a_0, b)$ de X, onde a_0 é o menor elemento de X (caso exista);
- todos os intervalos semi-abertos $(a, b_0]$ de X, onde b_0 é o maior elemento de X (caso exista);

Esta família $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em X que é chamada de **topologia da ordem**. (Ver mais detalhes na seção 14 do Munkres).

8. Mostre que a família $\mathcal{B}$ que acabamos de definir é de fato uma base para uma topologia em X.

9. Seja $(X, <)$ um conjunto munido de uma relação de ordem. Mostre que a família $\mathcal{C}$ composta por todos os conjuntos das formas:

- $(a, +\infty) := \{x |\ x > a\}$;

- $(-\infty, a) := \{x|\ x < a\}$;
- $[a, +\infty) := \{x|\ x \geq a\}$;
- $(-\infty, a] := \{x|\ x \leq a\}$,

é uma subbase para a topologia da ordem em X.

10. Seja X um conjunto ordenado munido com a topologia da ordem. Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é convexo se:

$$\forall a < b, \ \ a, b \in Y, \quad \text{temos} \quad (a, b) \subset Y.$$

Mostre que se $Y \subset X$ é um conjunto convexo então a topologia de subespaço em Y (ou seja, a topologia induzida por X em Y) coincide com a topologia da ordem em Y.

11. Mostre que o resultado do problema 10 não é valido se retirarmos a hipótese da conexidade de Y.

12. Uma função $f : X \to Y$ é dita aberta se dado qualquer conjunto aberto $U \subset X$ tem-se que $f(U)$ é aberto em Y. Mostre que as projeções π_1 e π_2 definidas em $X \times Y$ (munido da topologia produto) são funções abertas.

13. Mostre que a coleção enumerável

$$\{(a, b) \times (c, d) : a < b \text{ e } c < d, \quad \text{com} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

é uma base para $\mathbb{R}^2$ (munido da topologia usual, ou seja, a topologia gerada pela métrica euclidiana).

14. Seja $I = [0, 1]$. Compare a topologia produto em $I \times I$, a topologia lexicográfica em $I \times I$ e a topologia que $I \times I$ herda como subespaço de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munido da topologia lexicográfica.

15. Sejam d e ρ duas métricas em um espaço X e sejam τ_d e τ_ρ as topologias provenientes de tais métricas. Prove que

$$\tau_d \supset \tau_\rho$$

se, e somente se, para cada $x \in X$ e cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$B_d(x, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon).$$

16. Seja d a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e ρ a métrica do máximo, definida por,

$$\rho(x, y) := \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Mostre que as topologias τ_d e τ_ρ, induzidas por d e ρ respectivamente, são equivalentes à topologia produto usual em $\mathbb{R}^n$.