Topologia Geral - MA/MM 453
Lista Zero

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

0.1 Revisão de elementos

1. Demonstre as Leis de De Morgan.

2. Seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Sejam $B \subset Y, B_i \subset Y$, $i \in I$, mostre que

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

c) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

3. Seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Dados $A \subset X$, $A_i \subset X$, $i \in I$, mostre que:

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, com igualdade se f for injetiva.

c) $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$, se f for injetiva.

d) $f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A)$, se f for sobrejetiva.

4.

a) Dê um exemplo de uma função $f : X \to Y$ e conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tais que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

b) Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.

5. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$, com igualdade se f for injetiva. Apresente também um exemplo onde a igualdade não ocorre.

b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, com igualdade se f for sobrejetiva. Apresente também um exemplo onde a igualdade não ocorre.

6. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ aplicações tais que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in X$. Prove que f é injetiva e g é sobrejetora. Conclua que se f e g são tais que

$$f \circ g(y) = y, \quad \forall y \in Y \quad \text{e} \quad g \circ f(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

então f e g são bijetoras.

7. Seja $A_1, A_2, ...$ uma coleção infinita de subconjuntos de um conjunto dado. Defina

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

e

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

Prove que

1) $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$;

2) se $A_n \subseteq A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (ou seja, se a sequência A_n for crescente), então temos

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

3) se $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (ou seja, se a sequência A_n for decrescente), então temos

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

0.2 Revisão de finitude e enumerabilidade

Um conjunto A é dito finito se existir $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção

$$f : A \to \{1, 2, \dots, n\}.$$

Um conjunto A é dito enumerável se for finito ou existe uma função bijetora

$$f : A \to \mathbb{N}.$$

Em alguns lugares na literatura o termo *contável* é utilizado no lugar de *enumerável* e o termo *enumerável infinito* é utilizado para designar *contável e infinito.*

8. Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

9. Seja A um conjunto contável, mostre que $A \times A$ é enumerável.

10. Sejam $A_n, n \in \mathbb{N}$, conjuntos enumeráveis, mostre que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

é enumerável.

11. Mostre que o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de todas as sequências de zeros e uns não é enumerável.

12. Um número complexo z é dito algébrico se existem inteiros $a_0, a_1, ..., a_n$, não todos nulos, tais que

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Prove que o conjunto de todos os números algébricos é enumerável.
Dica: Para todo inteiro positivo N existe apenas um número finito de equações com

$$n + |a_0| + ... + |a_n| = N.$$

13. Prove que existem números reais que não são algébricos.

14. Determine se o conjunto dos números irracionais é enumerável ou não enumerável.

0.3 Revisão breve de espaços métricos/análise 1

15. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *perfeito* se:

i) X é fechado (ou seja, X contém todos os seus pontos de acumulação); e

ii) todos os seus elementos são pontos de acumulação do próprio X.

Mostre que todo conjunto perfeito $X \subset \mathbb{R}$ é não enumerável.

16.a. Defina:

a) Função distância (ou métrica);

b) Espaço métrico;

c) Bola (ou vizinhança) de centro p e raio r;

d) Conjunto aberto;

e) Conjunto fechado;

f) Conjunto perfeito;

g) Subconjunto denso em um espaço métrico X.

Dê um exemplo de cada uma das definições acima.

16.b. Prove que as seguintes funções são métricas em $C[a,b]$ (onde $C[a,b]$ denota o conjunto de todas as funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$)

a) $d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : a \leq x \leq b\}$.

b) $d(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

16.c.

a) Dê exemplo de uma sequência de abertos em $\mathbb{R}$ cuja interseção não seja um aberto.

b) Dê exemplo de uma sequência de fechados em $\mathbb{R}$ cuja união não seja um fechado.

17. Mostre que conjuntos finitos não possuem pontos de acumulação.

18. Defina conjunto compacto (em um espaço métrico). Mostre que se X é um espaço métrico então todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X.

15. Seja X um espaço métrico e $K \subset X$ um subconjunto compacto de X. Seja $F \subset K$ um subconjunto. Mostre que se F é um conjunto fechado então F é compacto.

19. Enuncie e demonstre o Teorema de Weierstrass.

20. Defina o conjunto ternário de Cantor e mostre que ele é perfeito.

21. Construa um conjunto limitado de números reais com exatamente três pontos de acumulação.

22. Dado um conjunto E denotamos por E' o conjunto dos pontos de acumulação de E. Prove que E' é fechado. Prove que E e $\overline{E}$ tem os mesmos pontos de acumulação. (Lembre-se que $\overline{E} = E \cup E'$.) É verdade que E and E' sempre tem os mesmos pontos de acumulação?

23. Sejam $A_1, A_2, ...$ subconjuntos de um espaço métrico (X, d).

a) Se $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$, prove que

$$\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

para $n = 1, 2, 3, ...$

b) Se $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, prove que

$$\overline{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

Dê um exemplo onde a inclusão é própria.

24. Verdadeiro ou Falso. Se verdadeiro demonstre, se falso apresente um contra-exemplo.

– ( ) Todo ponto de um conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}^2$ é um ponto de acumulação de E.

– ( ) Todo ponto de um conjunto fechado $E \subset \mathbb{R}^2$ é um ponto de acumulação de E.

25. Seja E° o conjunto de todos os pontos interiores de um subconjunto E de um espaço métrico (X, d).

a) Prove que E° é aberto.

b) Prove que E é aberto se, e somente se, $E^\circ = E$.

c) Se $G \subset E$ e G é aberto, prove que $G \subset E^\circ$.

d) Prove que o complemento de E° é o fecho do complemento de E.

e) Os conjuntos E e $\overline{E}$ necessariamente tem interiores iguais?

f) Os conjuntos E e E° necessariamente tem fechos iguais?

26. Seja X um conjunto infinito. Para $p \in X$ e $q \in X$ defina

$$d(p, q) = 1 \quad \text{se } p \neq q,$$

$$d(p, q) = 0 \quad \text{se } p = q.$$

Prove que d é uma métrica em X. Caracterize os conjuntos abertos, fechados e compactos com respeito a esta métrica.

27. Construa um conjunto compacto dos números reais cujo conjunto dos pontos de acumulação é enumerável.

28. Dê um exemplo de uma cobertura aberta do segmento $(0, 1)$ que não tem subcobertura finita.

29. Um espaço métrico é dito separável se ele contém um subconjunto enumerável e denso. Mostre que $\mathbb{R}^k$ é separável.