Topologia Geral - MA/MM-453 - Prof. Gabriel Ponce
Testinho 1

Instruções:

- Coloque o nome e RA de todos os integrantes em TODAS as folhas;
- **Justifique bem as soluções. Lembre-se: Parte da nota atribuida à solução será para a escrita**;

Questão 1: Defina espaço de Hausdorff. Mostre que um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta = \{(x, x) : \quad x \in X\}$ é um conjunto fechado no espaço produto $X \times X$.

Questão 2:

a) Seja X espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que os conjuntos

$$\{x \in X : \quad f(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in X : \quad f(x) \geq g(x)\} \quad \text{e} \quad \{x \in X : \quad f(x) = g(x)\}$$

são fechados em X. Conclua que os conjuntos

$$\{x \in X : \quad f(x) > g(x)\} \quad \text{e} \quad \{x \in X : \quad f(x) < g(x)\}$$

são abertos em X.

b) Apresente um exemplo de um espaço topológico (X, τ) e de funções contínuas $f, g : X \to X$ de forma que

$$\{x \in X : \quad f(x) = g(x)\}$$

não seja fechado em X.

Questão 3:

a) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Mostre que se existe uma sequência (x_n) de pontos de X tal que

$$x_n \to x$$

então $x \in \overline{A}$. Mostre que se X for metrizável então a recíproca também é verdadeira.

b) Seja $f : X \to Y$ uma função entre dois espaços topológicos. Mostre que, se f for contínua, então para toda sequência convergente (x_n) com $x_n \to x$ teremos

$$f(x_n) \to f(x).$$

Mostre que a recíproca é verdadeira se X for metrizável.

Questão 4: Um grupo G é dito um grupo topológico se G for um espaço topológico satisfazendo o axioma T_1 e de forma que as operações de multiplicação e inversão:

$$\times : G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

$$i : G \to G, \quad x \mapsto x^{-1},$$

sejam contínuas.

a) Mostre que $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ são grupos topológicos onde $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ estão munidos com a topologia usual.

b) Seja G um grupo topológico, mostre que G é um espaço de Hausdorff. Além disto, mostre que dados $x, y \in G$ com $x \neq y$, existe uma vizinhança $V \subset G$ do elemento unitário de G tal que

$$(x \cdot V) \cap (y \cdot V) = \emptyset,$$

onde $g \cdot V := \{g \cdot v : \quad v \in V\}$.