

ChocOlimpíada de MAT *IV* - Primeiro período

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP

Problema 1. (80 pts)

- a) (40 pts) Sejam z_1, z_2, \dots, z_n e w_1, w_2, \dots, w_n números complexos quaisquer, demonstre que

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_n w_n|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

Esta desigualdade é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz para números complexos.

- b) (40 pts) Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tais que

$$|z_1 + z_2 + z_3| = 1,$$

prove que

$$\frac{|z_1|^2}{3^3} + \frac{|z_2|^2}{4^3} + \frac{|z_3|^2}{5^3} \geq \frac{1}{6^3}.$$