Matemática IV 2018- Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	B	Total

Instruções:

- **Horário de início: 19:00h   Horário de encerramento: 20:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos ou for identificada qualquer forma de cola a avaliação será anulada;
- Indique quais questões você escolheu circulando o número da questão na tabela acima;
- Coloque o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

Resolva o problema 1**.**

Problema 1**:** Seja $w := \mathrm{V.\,P.}(2i)^i$, onde "V.P." denota o valor principal.

a) (1.0) Calcule w.

b) (0.5) Calcule o argumento principal $\mathrm{Arg}(w)$.

c) (1.0) Determine o logaritmo principal $\mathrm{Log}\, w$.

Solução: a) Primeiramente lembremos que, pela definição do valor principal, temos:

$$w = \mathrm{V.\,P.}(2i)^i = e^{i\cdot \mathrm{Log}(2i)}. \tag{0.1}$$

Agora, como o argumento principal de $2i$ é igual a $\pi/2$ temos:

$$\mathrm{Log}(2i) = \ln|2i| + i\,\mathrm{Arg}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}.$$

Substituindo em (0.1) temos:

$$w = e^{i\cdot(\ln 2 + i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\cdot \ln 2}. \tag{0.2}$$

b) Em (0.2), w está escrito na fórma polar

$$w = r\cdot e^{i\theta}, \quad \text{onde} \quad r = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad \theta = \ln 2.$$

Portanto concluimos que $|w| = e^{-\frac{\pi}{2}}$ e que $\ln 2$ é **um argumento** de w. Para ver que de fato este é o argumento principal precisamos mostrar que $\ln 2$ está no intervalo $(-\pi, \pi]$. Observe que

$$-\pi < 1 = \ln 0 < \ln 2.$$

Além disso,

$$2 < e^1 < e^{\pi} \Rightarrow \ln 2 < \ln e^{\pi} = \pi.$$

Logo,

$$-\pi < \ln 2 < \pi.$$

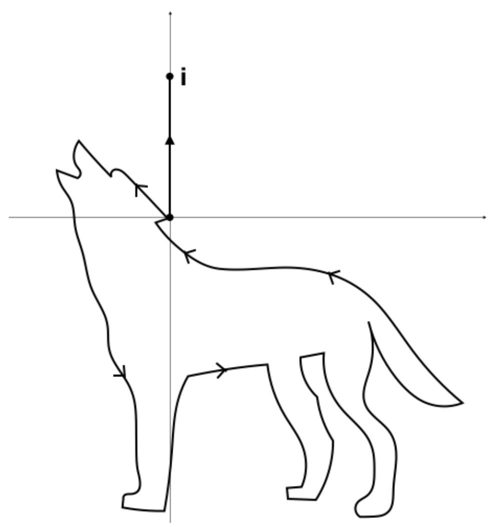
Assim, de fato o argumento $\ln 2$ é o argumento principal de w, ou seja, $\operatorname{Arg} w = \ln 2$.

c) Para calcular $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \cdot \operatorname{Arg}(w)$, precisamos calcular o módulo e o argumento principal de w. Ambos foram determinados na alternativa (b). Logo, substituindo os valores encontrados em (b) na expressão de $\operatorname{Log} w$ temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} w &= \ln|w| + i \cdot \operatorname{Arg}(w)\\ &= \ln e^{-\frac{\pi}{2}} + i \cdot \ln 2\\ &= -\frac{\pi}{2} + i \cdot \ln 2.\end{aligned}$$

Escolha DOIS dentre os problemas $2-4$.

Problema 2: (2.5) A seguinte figura mostra uma curva C no plano complexo, formada por um cachorro uivando e um segmento de reta, cujo ponto inicial é a origem, o ponto final é i e C está orientada conforme indicado.



Calcule

$$\int_C z^3 + 1dz.$$

Solução 1:

Observe que a função $f(z) = z^3 + 1$ possui antiderivada $F(z) = \frac{z^4}{4} + z$ em todo o plano complexo $\mathbb{C}$. Portanto, pelo teorema das anti-derivadas, a derivada na curva C só depende do ponto final e inicial e é dada por:

$$\int_C z^3 + 1 = \int_0^i z^3 + 1 = F(i) - F(0) = \frac{i^4}{4} + i - 0 = \frac{1}{4} + i.$$

Solução 2: Consideremos C_0 a curva fechada simples dada pelo cachorro uivando e C_1 o segmento de reta que liga 0 a i. Assim $C = C_0 + C_1$. Observe que como $z^3 + 1$ é analítica em todo $\mathbb{C}$, ela é analítica dentro de C_0 e sobre C_0. Logo, pelo Teorema de Cauchy-Goursat temos

$$\int_{C_0} z^3 + 1\, dz = 0.$$

Agora, a curva C_1 é parametrizada por $z(t) = t \cdot i$, $0 \leq t \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z^3 + 1\, dz = \int_0^1 (z(t)^3 + 1) z'(t)\, dt = \int_0^1 (t^3 \cdot i^3 + 1) \cdot i dt \\ = i \cdot \int_0^1 1 - it^3 dt = i \cdot \left(\int_0^1 1 dt - i \int_0^1 t^3 dt \right) \\ = i \cdot (1 - i \cdot 14) = \frac{1}{4} + i.\end{aligned}$$

Problema 3: (2.5) Sem calcular o valor da integral, mostre que se C é a fronteira do triângulo com vértices nos pontos $z_0 = 0$, $z_1 = 3i$, e $z_2 = -4$ orientada no sentido anti-horário, então

$$\left| \int_C (e^z - \overline{z}) dz \right| \leq 60$$

Solução: Primeiramente lembremos que, por um teorema, se uma função complexa f é tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in C$ então

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq M \cdot L(C),$$

onde $L(C)$ denota o comprimento da curva C.

No nosso caso tome $f(z) = e^z - \overline{z}$. Pela desigualdade triângular temos:

$$|f(z)| = |e^z - \overline{z}| \leq |e^z| + |\overline{z}|. \tag{0.3}$$

Agora, lembremos que se $z = x + iy$ então $e^z = e^x \cdot e^{iy}$, o que implica que $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$. Além disso $|\overline{z}| = |z|$. Portanto, substituindo em (0.3) temos:

$$|f(z)| \leq e^{\mathcal{R}e(z)} + |z|.$$

Observe que se $z \in C$ então $|z| \leq 4$ e $-4 \leq \mathcal{R}e(z) \leq 0$. Assim, da última inequação temos:

$$|f(z)| \leq e^{\mathcal{R}e(z)} + |z| \leq e^0 + 4 = 5.$$

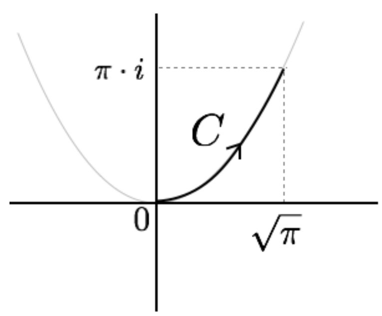
Agora, o comprimento de C é o perímetro do triângulo C. Observe que C é um triângulo retângulo com catetos de tamanhos 3 e 4. Assim, a hipotenusa mede 5 e o perímetro é $L(C) = 3 + 4 + 5 = 12$. Finalmente, pelo teorema mencionado tomando $M = 5$:

$$\left| \int_C e^z - \overline{z}\, dz \right| \leq 5 \cdot 12 = 60,$$

como queríamos demonstrar. □

Problema 4: (2.5)

a) (1.5) Seja C o arco da curva descrita pela equação $y = x^2$ (onde $z = x + iy$) do ponto 0 ao ponto $\sqrt{\pi} + \pi \cdot i$ conforme mostra a figura.



Calcule

$$\int_C e^z\, dz.$$

b) (1.0) Utilizando o resultado da alternativa (a) calcule:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\ \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2)\ )\ dx.$$

Solução

a) Como a função $z \mapsto e^z$ é uma função inteira ela admite anti-derivada em todo o plano complexo e esta antiderivada é dada por $F(z) = e^z$. Assim, pelo teorema das anti-derivadas temos que a integral depende apenas do ponto inicial $z_0 = 0$ e do ponto final $z_1 = \sqrt{\pi} + \pi \cdot i$ e é dada por:

$$\int_C e^z \, dz = \int_0^{\sqrt{\pi}+\pi \cdot i} e^z \, dz = e^{\sqrt{\pi}+\pi \cdot i} - e^0 = e^{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\pi \cdot i} - 1 = -e^{\sqrt{\pi}} - 1.$$

b) Observe que a curva dada no enunciado é descrita por:

$$C: \; z = x + iy \quad \text{com} \quad y = x^2, \; 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}.$$

Ou seja, ela é parametrizada por:

$$C: \; z(x) = x + i \cdot x^2 \quad , 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}.$$

Assim, pela definição de integral complexa temos:

$$\begin{aligned}
\int_C e^z \, dz &= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{z(x)} z'(x) \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{x+i\cdot x^2} (1 + 2x \cdot i) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x (\cos x^2 + i \cdot \operatorname{sen} x^2)(1 + 2x \cdot i) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x (\cos x^2 + 2x \cos x^2 \cdot i + i \cdot \operatorname{sen} x^2 - 2x \cdot \operatorname{sen} x^2) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\, \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2) \,) \, dx + i \cdot \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (2x \cos x^2 + \operatorname{sen} x^2) \, dx.
\end{aligned}$$

Portanto concluimos que a integral que buscamos é exatamente a parte real da integral do item (a), ou seja,

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\, \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2) \,) \, dx = \mathcal{R}e \left(\int_C e^z \, dz \right).$$

Pelo item (a), a integral do lado esquerdo é igual a $-e^{\sqrt{\pi}} - 1$, logo

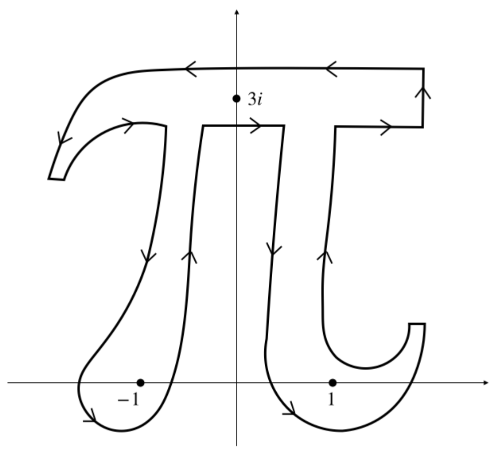
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\, \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2) \,) \, dx = \mathcal{R}e \left(\int_C e^z \, dz \right) = \mathcal{R}e(-e^{\sqrt{\pi}} - 1) = -e^{\sqrt{\pi}} - 1.$$

Resolva o problema 6**.**

Problema 6**.**

a) (0.5) Enuncie o Teorema da fórmula da integral de Cauchy generalizada.

b) (2.0) Seja C o caminho fechado simples orientado positivamente apresentado na figura abaixo



calcule

$$\int_C \frac{e^z \operatorname{sen} z}{(z-3i)(z^2-1)}\, dz$$

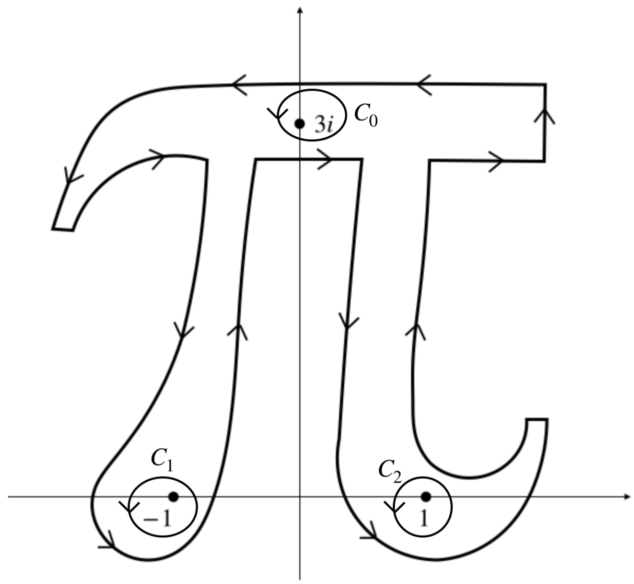
Solução:

a) Veja o enunciado dado em sala de aula.

b) Consideremos

$$f(z) := \frac{e^z \operatorname{sen} z}{(z-3i)(z^2-1)}.$$

Considere $z_0 = 3i$, $z_1 = -1$ e $z_2 = 1$ e considere caminhos fechados simples, C_0, C_1 e C_2 orientados positivamente conforme a figura abaixo.



Por um teorema visto em sala (Princípio de deformação) sabemos que, como a função $f(z)$ é analítica em C_0, C_1, C_2, C e na região entre tais curvas segue que:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)\ dz + \int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_2} f(z)\ dz.$$

Assim, basta calcular cada uma das integrais do lado direito e somar.

Integral em C_0: Observe que dentro de C_0 a única singularidade é $z_0 = 3i$. Assim, tome

$$g_0(z) = \frac{e^z \operatorname{sen} z}{z^2 - 1}.$$

Logo, $f(z) = \frac{g_0(z)}{z-3i}$ donde segue, pela fórmula da integral de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{g_0(z)}{z-3i}\ dz = g_0(3i).$$

Substituindo na expressão de g_0 e lembrando que $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ temos,

$$g_0(3i) = \frac{e^{3i}(e^{-3} - e^3)}{(9i^2 - 1)2i} = \frac{e^{3i}(e^{-3} - e^3)}{-20i}.$$

Logo,
$$\int_{C_0} f(z)\,dz = 2\pi\cdot i\cdot\frac{e^{3i}(e^{-3}-e^{3})}{-20i} = -\pi\cdot\frac{e^{3i}(e^{-3}-e^{3})}{-10}.$$

Integral em C_1: Observe que dentro de C_1 a única singularidade é $z_1 = -1$. Assim, tome
$$g_1(z) = \frac{e^z \operatorname{sen} z}{(z-3i)(z-1)}.$$
Logo, $f(z) = \frac{g_1(z)}{z+1}$ donde segue, pela fórmula da integral de Cauchy que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g_1(z)}{z+1}\,dz = g_1(-1).$$
Agora,
$$g_1(-1) = \frac{e^{-1}\operatorname{sen}(-1)}{-2(-1-3i)} = \frac{e^{-1}\operatorname{sen}(1)}{2(-1-3i)}.$$
Logo,
$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \pi\cdot i\cdot\frac{e^{-1}\operatorname{sen}(1)}{-1-3i}.$$

Integral em C_2: Observe que dentro de C_2 a única singularidade é $z_2 = 1$. Assim, tome
$$g_2(z) = \frac{e^z \operatorname{sen} z}{(z-3i)(z+1)}.$$
Logo, $f(z) = \frac{g_2(z)}{z-1}$ donde segue, pela fórmula da integral de Cauchy que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{g_2(z)}{z-1}\,dz = g_2(1).$$
Agora,
$$g_2(1) = \frac{e\operatorname{sen}(1)}{2(1-3i)}.$$
Logo,
$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \pi\cdot i\cdot\frac{e\operatorname{sen}(1)}{1-3i}.$$

Portanto:

$$\int_C f(z)dz = -\pi \cdot \frac{e^{3i}(e^{-3} - e^{3})}{-10} + \pi \cdot i \cdot \frac{e^{-1}\operatorname{sen}(1)}{-1-3i} + \pi \cdot i \cdot \frac{e\operatorname{sen}(1)}{1-3i}.$$

Bônus.(1.0) Demonstre o Teorema da Fórmula da Integral de Cauchy.

Boa Prova!!