Gabarito P3 1^o semestre 2018

Problema 1: Determine a expansão em séries de potência de

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$$

na região:
a) $|z| < 1$
b) $1 < |z| < 2$

Solução 1. a): Notemos que tal região é um disco, e além disso, f é analítica em neste disco, dessa forma, a função admite expansão em série de Taylor. Assim, observemos que:

$$\bullet \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} = \frac{-1}{2}\frac{1}{(1-\frac{z}{2})} + \frac{1}{(1-z)} \quad (i)$$

Por outro lado,como $\frac{|z|}{2} < \frac{1}{2}$,podemos escrever:

$$\bullet \frac{-1}{2}\frac{1}{(1-\frac{z}{2})} = \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (ii).$$

$$\bullet \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (iii).$$

Dessa forma,substituindo $(ii),(iii)$ em (i),temos:

$$\bullet \frac{1}{(z-2)(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^{n+1}})z^n$$

b) Agora porém observe que não temos mais um disco e sim um anel, f é analítica em tal anel e portanto, admite expansão em série de Laurent nesse anel.Assim,temos que:

$$\bullet \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{-1}{2}\frac{1}{(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{z}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})} \quad (iv)$$

Observando que $|\frac{1}{z}| < 1$ e $\frac{|z|}{2} < 1$,podemos escrever:

$$\bullet \frac{-1}{2}\frac{1}{(1-\frac{z}{2})} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (v).$$

$$\bullet -\frac{1}{z}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (vi)$$

Substituindo $(v),(vi)$ em (iv),temos que:

$$\bullet \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{z^n}$$

Problema 2:

a) Defina os três tipos de singularidades isoladas (essencial, removível e polo de ordem m).

b) Classifique todas as singularidades da função (ou seja, para cada singularidade determine em qual dos três tipos ela se encaixa):

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + e^{\frac{1}{3-z}}$$

.

Solução 2. a) A singularidade essencial é a que para todo $N > 0$, existe $n > N$ tal que $b_n \neq 0$, ou seja, existem infinitos $b_n s$ não nulos.

Já a singularidade removível é a que $b_n = 0$ para todo $n > 0$.

E o polo de ordem m é a que existe um N tal que $b_N \neq 0$, mas $b_n = 0$ para todo $n > N$.

b) Primeiramente percebemos que f têm duas singularidades, $z = 2$ e $z = 3$ e como temos um número finito de singularidades todas são isoladas. Vamos então analisar a função em $z_0 = 2$.

Manipulando f chegamos em:

$$f(z) = \frac{1 + (z-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{3-z}}}{(z-2)^2}.$$

Definimos $\phi = 1 + (z-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{3-z}}$. ϕ é analítica em z_0 e $\phi(z_0) = 1 \neq 0$. Então como $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-z_0)^2}$, o ponto z_0 é um polo de ordem 2.

Agora analisamos a função em $z_1 = 3$, temos que:

$$e^{\frac{1}{3-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3-z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^n \cdot n!}.$$

Por tanto existirão infinitos $b_n s$, ou seja z_1 é uma singularidade essencial.

Problema 3:

a) Utilizando séries, mostre que a função f definida através da equação

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}, \text{ quando } z \neq 0$$

$$f(z) = 1, \text{ quando } z = 0$$

é inteira.

b) Diferenciando a série de potencias de $\frac{1}{1-z}$ mostre que

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n, \mid z \mid < 1.$$

Solução 3. a) Sabemos que a série de $\operatorname{sen}(z)$ no 0 é:

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Seja $g(z) = \frac{\text{sen(z)}}{z}$, então

$$g(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Ou seja,

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \ldots$$

Então $g(0) = 1$ e $g(z) = \dfrac{\text{sen}(z)}{z}$ se $z \neq 0$, por tanto $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e como $g(z)$ é inteira, $f(z)$ é inteira.

b) Quando $\mid z \mid< 1$, sabemos que:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

então derivando os dois lados, temos

$$\frac{-1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1},$$

e derivando outra vez, temos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)nz^{n-2},$$

mas para $n = 0$ e $n = 1$ os elementos da somatória são nulos, portanto podemos reescrever ela da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)nz^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)nz^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^k,$$

a última igualdade é verdadeira, pois é feita uma mudança de variável, onde $n = k + 2$.

Problema 4: Utilize o teorema do resíduo no infinito para calcular $\displaystyle\int_C \frac{z^9}{1-z^8}dz$. Onde C é o círculo $|z| = 2$, orientado positivamente.

Solução 4. Observemos que:
$1-z^8=0 \Leftrightarrow z^8=1=e^{0i}$.Assim,$z_0=e^{0i}$,$r_0=1$,e portanto, as raízes da equação $z^8=1$ estão todas no circulo de raio 1, e além disso, temos 8 singularidades no interior de C, dessa forma, podemos aplicar o teorema dos resíduos infinitos.Para isso,temos que:

- $\dfrac{1}{z^2}f(\dfrac{1}{z})=\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{z^8-1}=\dfrac{1}{z^3}\dfrac{1}{z^8-1}=-\dfrac{1}{z^3}\dfrac{1}{1-z^8}\ , \quad (0<|z|<1) \qquad (*).$

Lembremos agora da série geométrica:

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n, \quad |w|<1$$

Dessa forma,$(*)$ fica:

- $-\dfrac{1}{z^3}\dfrac{1}{1-z^8}=-\dfrac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}z^{8n}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{8n-3}$, portanto, $Res_{z=0}\dfrac{1}{z^2}f(\dfrac{1}{z})=0$, e

assim, pelo teorema dos resíduos no infinito,temos que:

- $\displaystyle\int_C \frac{z^9}{1-z^8}dz=2\pi i(0)=0.$

Prolema 5:

Utilizando o Teorema dos resíduos de Cauchy calcule a integral

$$\int_C \frac{z^{2018}+1}{z(z-1)}dz,$$

onde C é o círculo de centro $z_0=1$ e raio $R=4$ orientado positivamente.

Solução 5. Seja $f(z)=\dfrac{z^{2018}+1}{z(z-1)}$, então as únicas singularidades são $z_0=0$ e $z_1=1$ e são isoladas por existir um número finito delas.

Primeiro estudaremos o caso de $z_0=0$, então tome $\phi(z)=\dfrac{z^{2018}+1}{(z-1)}$.

Notamos que $\phi(z)$ é analítica em z_0 e $\phi(z_0)=-1\neq 0$ e como $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{z}$, $z_0=0$ é um polo de ordem 1 e seu resíduo é $\phi(z_0)=-1$.

Agora para analisar o caso $z_1=1$, tome $\psi(z)=\dfrac{z^{2018}+1}{z}$ e pelo mesmo argumento anterior sabemos que z_1 é um polo de ordem 1 e seu resíduo é $\psi(z_1)=2$.

Por tanto pelo Teorema dos resíduos de Cauchy, temos que $\int_C f(z) = 2\pi i(-1+2) = 2\pi i$.