Matemática IV 2018- Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	6	B	Total

Instruções:

- **Horário de início: 19:00h   Horário de encerramento: 20:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos ou for identificada qualquer forma de cola a avaliação será anulada;
- Indique quais questões você escolheu circulando o número da questão na tabela acima;
- Coloque o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

Escolha o problema 1 **OU** 2**.**

Problema 1**:** Calcule

a) (1.5) $V.P.(-1+i)^{2i}$. Qual é o módulo deste valor?

b) (1.0) $\cos(\pi \cdot i)$

Solução: (a) Pela definição da função potência sabemos que

$$V.P.(-1+i)^{2i} = e^{2i \cdot \mathrm{Log}(-1+i)} \tag{0.1}$$

Vamos então calcular o logaritmo principal de $-1+i$ e substituir na equação anterior. Sabemos que

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow -1+i = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Como $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $-\pi < \frac{3\pi}{4} < \pi$ temos:

$$\mathrm{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}.$$

Portanto,

$$\mathrm{Log}(-1+i) = \ln|-1+i| + i\,\mathrm{Arg}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i \cdot \frac{3\pi}{4}.$$

Substituindo em (0.1) temos:

$$\begin{aligned} V.P.(-1+i)^{2i} =& e^{2i \cdot \mathrm{Log}(-1+i)} \\ =& e^{2i \cdot (\ln\sqrt{2} + i \cdot \frac{3\pi}{4})} \\ =& e^{-\frac{3\pi}{4} + i\ln 2} \\ =& e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i \ln 2} \\ =& e^{-\frac{3\pi}{4}} \cos(\ln 2) + e^{-\frac{3\pi}{4}} \operatorname{sen}(\ln 2) \cdot i. \end{aligned}$$

Finalmente, o módulo é dado por:

$$|V.P.(-1+i)^{2i}| = |e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\ln 2}| = e^{-\frac{3\pi}{4}}.$$

(b) Sabemos que se $z \in \mathbb{C}$ então

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Logo, tomando $z = \pi \cdot i$ temos

$$\cos(\pi \cdot i) = \frac{e^{i \cdot i \cdot \pi} + e^{-i \cdot i \cdot \pi}}{2} = \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2}.$$

Problema 2:

a) (1.5) Calcule $V.P.(-1+i)^{2i}$. Qual é o módulo deste valor?

b) (1.0) Mostre que se $\mathcal{R}e(z_1) > 0$ e $\mathcal{R}e(z_2) > 0$ então

$$\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2.$$

Solução: (a) Vide problema 1-(a).

(b) Consideremos z_1 e z_2 escritos na forma polar como:

$$z_1 = r_1 e^{i \operatorname{Arg} z_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i \operatorname{Arg} z_2}.$$

Como $\mathcal{R}e(z_1) > 0$ e $\mathcal{R}e(z_2) > 0$ então z_1 e z_2 pertencem ao primeiro ou quarto quadrantes do plano complexo, o que implica que:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z_2 < \frac{\pi}{2}. \tag{0.2}$$

Agora a forma exponencial do produto $z_1 z_2$ é dada por:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i \operatorname{Arg} z_1} \cdot r_2 e^{i \operatorname{Arg} z_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i \cdot (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)}.$$

Mas por (0.2) temos:

$$-\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < \pi.$$

Portanto, de fato, a soma dos argumentos principais será o argumento principal do produto z_1z_2, ou seja,

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Finalmente, temos

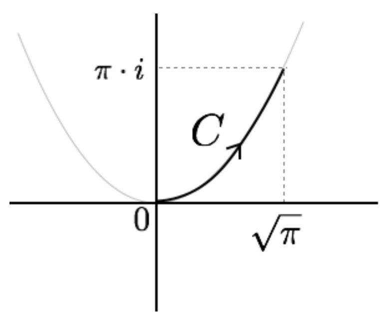
$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_1z_2) &= \ln|z_1z_2| + i\cdot\operatorname{Arg}(z_1z_2)\\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)\\ &= (\ln|z_1| + i\cdot\operatorname{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\cdot\operatorname{Arg} z_2)\\ &= \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Escolha DOIS dentre os problemas $3-5$.

Problema 3:

a) (1.5) Seja C o arco da curva descrita pela equação $y = x^2$ (onde $z = x+iy$) do ponto 0 ao ponto $\sqrt{\pi} + \pi \cdot i$ conforme mostra a figura.



Calcule

$$\int_C e^z\, dz.$$

b) (1.0) Utilizando o resultado da alternativa (a) calcule:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\ \cos(x^2) - 2x\cdot \operatorname{sen}(x^2)\ )\ dx.$$

Solução

a) Como a função $z \mapsto e^z$ é uma função inteira ela admite anti-derivada em todo o plano complexo e esta antiderivada é dada por $F(z) = e^z$. Assim, pelo teorema das anti-derivadas temos que a integral depende apenas do ponto inicial $z_0 = 0$ e do ponto final $z_1 = \sqrt{\pi} + \pi \cdot i$ e é dada por:

$$\int_C e^z \, dz = \int_0^{\sqrt{\pi}+\pi\cdot i} e^z \, dz = e^{\sqrt{\pi}+\pi\cdot i} - e^0 = e^{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\pi\cdot i} - 1 = -e^{\sqrt{\pi}} - 1.$$

b) Observe que a curva dada no enunciado é descrita por:

$$C: \; z = x + iy \quad \text{com} \quad y = x^2, \; 0 \le x \le \sqrt{\pi}.$$

Ou seja, ela é parametrizada por:

$$C: \; z(x) = x + i \cdot x^2 \quad , 0 \le x \le \sqrt{\pi}.$$

Assim, pela definição de integral complexa temos:

$$\begin{aligned}
\int_C e^z \, dz &= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{z(x)} z'(x) \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{x+i\cdot x^2}(1 + 2x \cdot i) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x(\cos x^2 + i \cdot \operatorname{sen} x^2)(1 + 2x \cdot i) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x(\cos x^2 + 2x \cos x^2 \cdot i + i \cdot \operatorname{sen} x^2 - 2x \cdot \operatorname{sen} x^2) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\, \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2) \,) \, dx + i \cdot \int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (2x \cos x^2 + \operatorname{sen} x^2) \, dx.
\end{aligned}$$

Portanto concluimos que a integral que buscamos é exatamente a parte real da integral do item (a), ou seja,

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\, \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2) \,) \, dx = \mathcal{R}e \left(\int_C e^z \, dz \right).$$

Pelo item (a), a integral do lado esquerdo é igual a $-e^{\sqrt{\pi}} - 1$, logo

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^x \cdot (\, \cos(x^2) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2) \,) \, dx = \mathcal{R}e \left(\int_C e^z \, dz \right) = \mathcal{R}e(-e^{\sqrt{\pi}} - 1) = -e^{\sqrt{\pi}} - 1.$$

Problema 4: (2.5) Sem calcular o valor da integral mostre que

$$\left|\int_C \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\right| \leq \frac{45\pi}{3-\sqrt{2}},$$

onde C é o semi-arco dado por $z = i + 3e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solução: Consideremos $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$. Vamos determinar um limitante superior para $|f(z)|$ para $z \in C$.

Observe que $z \in C \Leftrightarrow |z - i| = 3$. Assim para todo $z \in C$ temos:

$$|z^2+1| = |(z-i)(z+i)| = |z-i||(z-i)+2i| = 3|(z-i)+2i|.$$

Logo, pela desigualdade triângular,

$$|z^2+1| = 3|(z-i)+2i| \leq 3(|z-i|+|2i|) = 3(3+2) = 15, \quad \forall z \in C.$$

Analogamente, para $z \in C$ pela desigualdade triângular temos:

$$|z+1| = |(z-i)+(i+1)| \geq |z-i| - |i+1| = 3 - \sqrt{2}.$$

Portanto, para todo $z \in C$ temos

$$|f(z)| = \frac{|z^2+1|}{|z+1|} \leq \frac{15}{3-\sqrt{2}}.$$

Por um teorema segue que

$$\left|\int_C \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\right| \leq \frac{15}{3-\sqrt{2}} \cdot L(C),$$

onde $L(C)$ é o comprimento da curva C. Como C é metade de um círculo de raio 3, seu comprimento é dado por:

$$L(C) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi.$$

Substituindo na desigualdade acima obtemos:

$$\left|\int_C \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\right| \leq \frac{15}{3-\sqrt{2}} \cdot 3\pi = \frac{45\pi}{3-\sqrt{2}},$$

como queríamos demonstrar. □

Problema 5: (2.5) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(z) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + i \cdot e^x \cdot (x \cdot \operatorname{sen} y + y \cdot \cos y)), \ z = x + iy,$$

determine

$$\int_C f(z)\, dz$$

onde C é o círculo de centro em $z = 2018 \cdot i$ e raio $R = 1$ orientado positivamente.

Solução: Primeiramente vamos colocar $f(z)$ num formato mais simples. Observe que

$$\begin{aligned} f(z) =& e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + i \cdot e^x \cdot (x \cdot \operatorname{sen} y + y \cdot \cos y) \\ =& x \cdot e^x(\cos y + \operatorname{sen} y \cdot i) + i \cdot y \cdot e^x(\cos y + \operatorname{sen} y \cdot i) \\ =& (xe^x + i \cdot y \cdot e^x)(\cos y + \operatorname{sen} y \cdot i) \\ =& (x + iy)e^x \cdot e^{iy} \\ =& (x + iy)e^{x+iy} \\ =& ze^z. \end{aligned}$$

Ou seja, $f(z) = z \cdot e^z$. Como $z \mapsto e^z$ e $z \mapsto z$ são ambas funções inteiras segue que $f(z)$ também é uma função inteira, ou seja, analítica em todo o $\mathbb{C}$. Em particular f é analítica sobre a curva C e em seu interior, portanto, pelo Teorema de Cauchy-Goursat concluímos que

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

OBS: Você também poderia demonstrar que f é analítica em todo $\mathbb{C}$ através das equações de Cauchy-Riemann e do teorema das condições necessárias e suficientes para derivabilidade. Depois de mostrar que f é analítica em $\mathbb{C}$ basta usar Cauchy-Goursat deixando claro que as hipóteses do teorema de Cauchy-Goursat estão satisfeitas, como feito acima.

Resolva o problema 6.

Problema 6.

a) (1.0) Enuncie o Teorema da fórmula da integral de Cauchy e o Teorema da fórmula da integral de Cauchy generalizada.

b) (1.5) Seja C o círculo $|z| = 4$ orientado positivamente. Calcule

$$\int_C \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz$$

Solução:

a) Veja o enunciado dos teoremas passados em sala de aula.

b) Consideremos $f(z) = \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}$. Observe que $f(z)$ possui duas singularidades $z_0 = \pi$ e $z_1 = -\pi$ e ambas estão no interior de C pois $|z_0| = |z_1| = \pi < 4$.

Consderemos C_0 e C_1 círculos centrados em z_0 e z_1 respectivamente, orientados positivamente, e com raios pequenos o suficiente de forma a satisfazer:

- C_0 e C_1 são interiores a C;
- C_0 e C_1 não se tocam.

Assim, por um teorema demonstrado em sala temos:

$$\int_C \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz = \int_{C_0} \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz + \int_{C_1} \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz. \tag{0.3}$$

Agora vamos utilizar a fórmula da integral de Cauchy para calcular as duas integrais do lado direito.

Primeira integral: Consideremos $g(z) := \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z + \pi}$. A função $g(z)$ só não é analítica em $z_1 = -\pi$. Como $-\pi$ não está na curva C_0 e nem em seu interior, pela fórmula da integral de Cauchy temos:

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{C_0} \frac{g(z)}{z - \pi}\, dz = g(\pi)$$

$$\Rightarrow \int_{C_0} \frac{g(z)}{z - \pi}\, dz = 2\pi \cdot i \cdot \frac{e^{\pi} \operatorname{sen} \pi + e^{-\pi} \cos \pi}{\pi + \pi} = -i \cdot e^{-\pi}.$$

Logo,

$$\int_{C_0} \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz = -i \cdot e^{-\pi}.$$

Segunda integral: Consideremos $h(z) := \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z - \pi}$. A função $h(z)$ só não é analítica em $z_0 = \pi$. Como π não está na curva C_1 e nem em seu interior, pela fórmula da integral de Cauchy temos:

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{C_1} \frac{h(z)}{z - (-\pi)}\, dz = h(-\pi)$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \frac{h(z)}{z + \pi}\, dz = 2\pi \cdot i \cdot \frac{e^{-\pi} \operatorname{sen}(-\pi) + e^{\pi} \cos(-\pi)}{-\pi - \pi} = i \cdot e^{\pi}.$$

Logo,

$$\int_{C_1} \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz = i \cdot e^{\pi}.$$

Substituindo em (0.3) temos:

$$\int_{C} \frac{e^z \operatorname{sen} z + e^{-z} \cos z}{z^2 - \pi^2}\, dz = -i \cdot e^{-\pi} + i \cdot e^{\pi} = i \cdot (e^{-\pi} + e^{\pi}).$$

Bônus.(1.0) Demonstre o Teorema da Fórmula da Integral de Cauchy.

Boa Prova!!